Man kann den Kompaktheitssatz nutzen, um zu zeigen, dass bestimmte Klassen von Strukturen nicht FO-definierbar (in der Klasse <u>aller</u> σ-Strukturen) sind.

Zur Formulierung der Ergebnisse sind die folgenden Notationen nützlich:

<u>Definition 8.2</u> (Modellklassen und Axiomatisierbarkeit)

Sei σ eine Signatur.

<u>(a)</u> Für eine Menge Φ von $FO[\sigma]$-Sätzen sei

$$\mathrm{Mod}_\sigma(\Phi) := \{ \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathfrak{A} \models \Phi \}.$$

Die Menge $\mathrm{Mod}_\sigma(\Phi)$ heißt <u>Modellklasse</u> von Φ bzgl. σ.

<u>(b)</u> Eine Klasse K von σ-Strukturen heißt (erststufig) <u>axiomatisierbar</u> (oder <u>Δ-elementar</u>), wenn es eine Menge Φ von $FO[\sigma]$-Sätzen gibt, so dass $K = \mathrm{Mod}_\sigma(\Phi)$.

(c) Eine Klasse K von σ-Strukturen heißt <u>endlich axiomatisierbar</u> (oder <u>elementar</u>), wenn es eine <u>endliche</u> Menge Φ von $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätzen gibt, so dass $K = \mathrm{Mod}_\sigma(\Phi)$.

<u>Beobachtung 8.3</u>: K ist endlich axiomatisierbar genau dann, wenn es einen $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz φ mit $K = \mathrm{Mod}_\sigma(\{\varphi\})$ gibt. Daher gilt:

K ist endlich axiomatisierbar genau dann, wenn K FO-definierbar in der Klasse <u>aller</u> σ-Strukturen ist (vgl. Definition 3.16)

<u>Korollar 8.4</u>:
Für jede Klasse K von σ-Strukturen gilt:

K ist endlich axiomatisierbar $\iff$ $K^c := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A}$ ist eine σ-Struktur mit $\mathfrak{A} \notin K\}$ ist endlich axiomatisierbar.

<u>Beweis</u>: Klar (Übung).

Definition 8.5:

Die Mächtigkeit einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist die Mächtigkeit ihres Universums.
Eine Struktur ist endlich bzw. unendlich, abzählbar, überabzählbar, wenn ihr Universum die entsprechende Mächtigkeit hat.

Man sieht leicht, dass folgendes gilt:

Satz 8.6

Für jede Signatur σ gilt:
Die Klasse aller unendlichen σ-Strukturen ist axiomatisierbar.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei

$$\varphi_n := \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg x_i = x_j .$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$: $\quad \mathfrak{A} \models \varphi_n \iff |A| \geq n$

Somit gilt: $\mathfrak{A}$ unendlich $\iff \mathfrak{A} \models \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$.

D.h.: Die Menge $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ axiomatisiert die Klasse aller unendlichen Strukturen. $\square$

Im Folgenden zeigen wir, dass die Klasse aller endlichen σ-Strukturen nicht axiomatisierbar ist.

Lemma 8.7

Sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ eine Formelmenge, für die folgendes gilt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ und eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $|A| = m$ und $\mathfrak{A} \models \Phi$ (d.h. Φ besitzt beliebig mächtige endliche Modelle). Dann besitzt Φ auch ein unendliches Modell, d.h. es gibt eine σ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $|B| = \infty$ und $\mathfrak{B} \models \Phi$.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_n := \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg x_i = x_j$.

Sei $\Phi' := \Phi \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$.
Aus der Voraussetzung des Lemmas folgt, dass jede endliche Teilmenge von Φ' ein Modell hat. Der Kompaktheitssatz liefert, dass auch Φ' ein Modell hat, d.h. es gibt eine σ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \models \Phi'$. Wegen $\mathfrak{B} \models \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ muss $\mathfrak{B}$ unendlich sein. $\square$

Daraus folgt direkt:

Satz 8.8: (Nicht-Axiomatisierbarkeit der Endlichkeit)

Für jede Signatur σ gilt:

(a) Die Klasse aller endlichen σ-Strukturen ist nicht axiomatisierbar.

(b) Die Klasse aller unendlichen σ-Strukturen ist nicht endlich axiomatisierbar.

Beweis:

(a): Folgt direkt aus Lemma 8.7.

(b): Folgt aus (a) und Korollar 8.4 $\square$

Auf ähnliche Weise kann man unter Verwendung des Kompaktheitssatzes auch Folgendes zeigen:

Satz 8.9 (Nicht-Axiomatisierbarkeit von Graph-Zusammenhang)

Die Klasse ZG aller zusammenhängenden Graphen ist nicht axiomatisierbar.

Hier: $ZG := \{ G = (V, E^G) :$ V ist eine Menge, $E^G \subseteq V \times V$, und f.a. $a, b \in V$ gibt es einen Weg endlicher Länge von a nach b. $\}$

Beweis:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\psi_n(x,y)$ eine $FO[\{E\}]$-Formel, die besagt, dass es einen Weg der Länge n von x nach y gibt. D.h.:

$\psi_0(x,y) := x = y$, und f.a. $n \geq 1$ gilt

$$\psi_n(x,y) := \exists x_0 \exists x_1 \cdots \exists x_n \left(x_0 = x \wedge x_n = y \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} E(x_{i-1}, x_i) \right).$$

Somit gilt für alle Graphen $G = (V, E^G)$, für alle $a, b \in V$ und für alle $n \in \mathbb{N}$:

$G \models \psi_n[a,b] \iff$ es gibt in G einen Weg der Länge n von a nach b.

Also gilt auch:

$\left(\text{Es gibt in } G \text{ \underline{keinen} Weg endlicher Länge von } a \text{ nach } b\right) \iff \left(\text{f.a. } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } G \models \neg\psi_n[a,b]\right)$.

Angenommen, die Klasse aller zusammenhängenden Graphen wäre axiomatisierbar durch eine Menge Φ von $FO[\{E\}]$-Formeln.

Dann ist die Menge $\Psi := \Phi \cup \{\neg\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ unerfüllbar.

Im Folgenden zeigen wir, dass

jede <u>endliche</u> Teilmenge Γ von Ψ erfüllbar ist.

Laut Kompaktheitssatz müss dann auch Ψ erfüllbar

sein ↯ Widerspruch.

Sei also Γ eine endliche Teilmenge von Ψ.

Sei $m := \max\{ n \in \mathbb{N} : \neg\psi_n \in \Gamma \}$.

Sei G_m der Graph, der aus einer gerichteten

Kette aus $m+2$ Knoten besteht, d.h.

$G_m = (V, E^{G_m})$ mit $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{m+1}\}$ und

$E^{G_m} = \{ (v_{i-1}, v_i) : i \in \{1, \dots, m+1\} \}$.

Skizze: $G_m: \underset{v_0}{\circ} \to \underset{v_1}{\circ} \to \underset{v_2}{\circ} \to \cdots \to \underset{v_m}{\circ} \to \underset{v_{m+1}}{\circ}$

Dann gilt:

1.) $G_m \models \Phi$, da G_m zusammenhängend ist

2.) f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ gilt: $G_m \models \neg\psi_n[v_0, v_{m+1}]$,

da der kürzeste Weg von v_0 nach v_{m+1} in G_m die

Länge $m+1$ hat.

Gemäß der Wahl von m gilt daher für die

Belegung β mit $\beta(x) = v_0$ und $\beta(y) = v_{m+1}$:

$$(G_m, \beta) \models \Gamma.$$

Somit ist Γ erfüllbar. $\square$

8.2 Der Satz von Löwenheim und Skolem

Satz 8.10 (Satz von Löwenheim und Skolem)
Sei σ eine Signatur.
Jede abzählbare, erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ besitzt ein abzählbares Modell.

Beweis:
Sei Φ eine abzählbare, erfüllbare Menge von $FO[\sigma]$-Formeln.

OBdA können wir annehmen, dass

1) σ abzählbar ist
(ansonsten ersetzen wir σ durch die Menge aller in Φ vorkommenden Symbole aus σ), und

2) $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\Phi)$ unendlich ist
(ansonsten ersetzen wir — wie im Beweis von Lemma 7.43 — in Φ jede Variable v_i durch die Variable v_{2i} (f.a. $i \in \mathbb{N}$))

Da Φ erfüllbar ist, ist Φ gemäß Vollständigkeitssatz auch widerspruchsfrei.

Gemäß Lemma 7.41 und 7.42 gibt es daher eine widerspruchsfreie, negationstreue Menge $\Theta \subseteq FO[\sigma]$ mit $\Theta \supseteq \Phi$, die Beispiele enthält.

Gemäß Satz von Henkin (Satz 7.40) wird Θ von der reduzierten Terminterpretation $[\mathcal{I}_\Theta] = ([\mathfrak{A}_\Theta], [\beta_\Theta])$ erfüllt.

Gemäß Definition 7.36 ist die Mächtigkeit des Universums $[A_\Theta]$ höchstens so groß wie die Mächtigkeit der Menge T_σ aller σ-Terme.

Da σ abzählbar ist, ist auch T_σ abzählbar. Somit ist $[\mathcal{I}_\Theta]$ ein abzählbares Modell von $\Theta \supseteq \Phi$.

$\square$

Als dritte Folgerung aus dem Satz von Löwenheim und Skolem erhält man:

<u>Korollar 8.11</u>: Sei σ eine abzählbare Signatur. Dann ist die Klasse aller <u>überabzählbaren</u> σ-Strukturen nicht axiomatisierbar.

Beweis: Da σ abzählbar ist, ist auch die Menge $\mathrm{FO}[\sigma]$ abzählbar. Somit hat gemäß Satz von Löwenheim und Skolem jede erfüllbare Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ ein abzählbares Modell. $\square$

Bemerkung 8.12: (hier ohne Beweis):
Korollar 8.11 gilt sogar für beliebige Signaturen.

Bemerkung 8.13:
Die Voraussetzung "Φ abzählbar" im Satz 8.10 ist wichtig (siehe Aufgabe 1 von Übungsblatt 11).

Es sind verschiedene Varianten des Satzes von Löwenheim und Skolem bekannt, die genauere Aussagen über die Mächtigkeit von Modellen machen (hier ohne Beweis):

Absteigender Satz von Löwenheim und Skolem:
Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine erfüllbare, unendliche Formelmenge. Dann besitzt Φ ein Modell, dessen Mächtigkeit höchstens so groß wie die Mächtigkeit von Φ ist.

Aufsteigender Satz von Löwenheim und Skolem

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ eine Formelmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Dann gibt es zu jeder Menge M ein Modell von Φ, dessen Mächtigkeit mindestens so groß wie die Mächtigkeit von M ist.

Für einen Beweis sei auf das Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas verwiesen.

8.3 Elementare Äquivalenz und Nichtstandardmodelle der Arithmetik

Definition 8.14

Sei σ eine Signatur

(a) Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen elementar äquivalent (kurz: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), wenn sie dieselben $FO[\sigma]$-Sätze erfüllen (d.h. für jeden $FO[\sigma]$-Satz φ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi \text{)}.$$

(b) Die <u>Theorie</u> $Th(\mathfrak{A})$ einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist die Menge aller $FO[\sigma]$-Sätze, die $\mathfrak{A}$ erfüllt. D.h.:

$$Th(\mathfrak{A}) = \{ \varphi \in FO[\sigma] : \varphi \text{ ist ein Satz mit } \mathfrak{A} \models \varphi \}.$$

<u>Klar</u>:
- f.a. $FO[\sigma]$-Sätze φ und alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt: entweder $\varphi \in Th(\mathfrak{A})$ oder $\neg\varphi \in Th(\mathfrak{A})$
- f.a. σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt:
$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \iff Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$$

Daraus folgt direkt:

<u>Korollar 8.15</u>

Für jede Signatur σ und jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist die Klasse aller zu $\mathfrak{A}$ äquivalenten σ-Strukturen axiomatisierbar.

<u>Bemerkung 8.16</u>: Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur.

(a) Ist $\mathfrak{A}$ endlich, so gilt f.a. σ-Strukturen $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$$

(„$\Leftarrow$" ist klar; „$\Rightarrow$" folgt für <u>endliche</u> σ aus Aufgabe 2 von Übungsblatt 1. „$\Rightarrow$" für <u>unendliche</u> σ: Übung).

<u>(b)</u> Ist $\mathfrak{A}$ unendlich, so gibt es eine σ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, aber $\mathfrak{B} \not\cong \mathfrak{A}$.

(Dies folgt leicht aus dem Aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem; Details: Übung).

<u>Zur Erinnerung</u> (Standardmodell der Arithmetik):

- $\sigma_{Ar} = \{ \leq, +, \times, 0, 1 \}$, wobei $\leq$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist, $+$ und $\times$ zwei 2-stellige Funktionssymbole sind und 0 und 1 zwei Konstantensymbole sind.

- Das <u>Standardmodell der Arithmetik</u> ist die σ_{Ar}-Struktur

$$\mathcal{N} := \left(\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}} \right),$$

wobei $\leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}$ die natürliche lineare Ordnung, Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind, und $0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}$ die Zahlen 0 und 1 sind.

Definition 8.17

Ein Nichtstandardmodell der Arithmetik ist eine zu $\mathcal{N}$ elementar äquivalente, aber nicht-isomorphe σ_{Ar}-Struktur.

Aus Bemerkung 8.16 (b) folgt direkt, dass es ein Nichtstandardmodell der Arithmetik gibt.
Gemäß dem folgenden Satz gibt es sogar ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik.

Satz 8.18 (Der Satz von Skolem)
Es gibt ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik.

Beweis:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\underline{n}$ der folgendermaßen induktiv definierte σ_{Ar}-Term:

$\underline{0} := 0$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei
$\underline{n+1} := \underline{n} + 1$.

Klar: f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\underline{n}^{\mathcal{N}} = n$ (d.h. in $\mathcal{N}$ wertet sich der Term $\underline{n}$ zur Zahl n aus).

Sei $\Phi := Th(\mathcal{N}) \cup \{ \neg x = \underline{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \}$

Dann ist jede endliche Teilmenge Γ von Φ erfüllbar — z. B. durch die Interpretation $(\mathcal{N}, \beta)$ mit $\beta(x) := m+1$, wobei $m := \max \{ n : \neg x = \underline{n} \in \Gamma \}$.

Gemäß Kompaktheitssatz ist daher auch Φ erfüllbar.
Gemäß Satz von Löwenheim und Skolem besitzt Φ ein abzählbares Modell (beachte dazu: Φ ist abzählbar, da es nur abzählbar viele $FO[\sigma_{Ar}]$-Formeln gibt).

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ ein abzählbares Modell von Φ.

Dann ist $\mathfrak{A} \equiv \mathcal{N}$, denn für jeden $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz φ gilt:

Falls $\mathcal{N} \models \varphi$, so $\varphi \in Th(\mathcal{N}) \subseteq \Phi$, also $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Falls $\mathcal{N} \not\models \varphi$, so $\mathcal{N} \models \neg\varphi$, also $\neg\varphi \in Th(\mathcal{N}) \subseteq \Phi$, also $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, d.h. $\mathfrak{A} \not\models \varphi$.

Daher: $\mathcal{N} \models \varphi \iff \mathfrak{A} \models \varphi$.

D.h. $\mathfrak{A}$ und $\mathcal{N}$ sind elementar äquivalent.

Im Folgenden zeigen wir noch, dass $\mathfrak{A} \not\cong \mathcal{N}$.

Angenommen, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}$. Dann gibt es einen Isomorphismus π von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{A}$.

Gemäß Isomorphielemma (siehe Behauptung 1 im Beweis von Satz 1.36) gilt für jeden der σ_{Ar}-Terme $\underline{n}$ (f.a. $n \in \mathbb{N}$), dass

$$\pi\left(\underline{n}^{\mathfrak{N}}\right) = \underline{n}^{\mathfrak{A}}.$$

Wegen $\underline{n}^{\mathfrak{N}} = n$ gilt also f.a. $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\pi(n) = \underline{n}^{\mathfrak{A}}.$$

Da π ein Isomorphismus von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{A}$ ist, gilt:

$$A = \{\pi(n) : n \in \mathbb{N}\} = \{\underline{n}^{\mathfrak{A}} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Somit gilt für die Belegung β und die Variable x, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, s.d. $\beta(x) = \underline{n}^{\mathfrak{A}}$.

Somit gilt: $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta) \models x = \underline{n}$.

Dies ist ein Widerspruch zu der Aussage, dass $\mathcal{I}$ ein Modell von Φ ist, da Φ insbes. die Formel $\neg x = \underline{n}$ enthält.

$\square$

<u>Frage</u>: Wie sieht ein Nichtstandardmodell der Arithmetik aus?

<u>Antwort</u>: Sei $\mathfrak{A}$ ein Nichtstandardmodell der Arithmetik. D.h.: $\mathfrak{A} \equiv \mathcal{N}$ und $\mathfrak{A} \not\cong \mathcal{N}$.

Dann gilt:
- $\leq^{\mathfrak{A}}$ eine lineare Ordnung auf A,
- $0^{\mathfrak{A}}$ ist das kleinste Element dieser Ordnung,
- jedes Element aus A hat einen unmittelbaren Nachfolger bzgl $\leq^{\mathfrak{A}}$, und
- jedes Element aus $A \setminus \{0^{\mathfrak{A}}\}$ hat einen unmittelbaren Vorgänger bzgl $\leq^{\mathfrak{A}}$

(denn: jede dieser 4 Aussagen lässt sich durch einen $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz beschreiben, der von $\mathcal{N}$ erfüllt wird).

Außerdem erfüllt $\mathfrak{A}$ die folgenden Sätze aus $Th(\mathcal{N})$:
(für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\underline{n}$ dabei der im Beweis von Satz 8.18 definierte σ_{Ar}-Term):

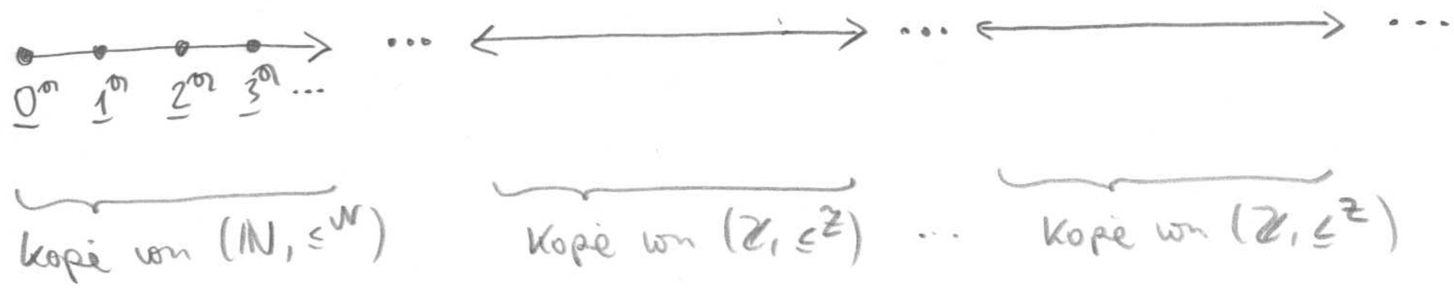
- $\forall x \; \underline{0} \leq x$
- $\forall x \left(\underline{0} = x \lor \underline{1} \leq x \right)$

- $\forall x\,(\underline{0} = x \lor \underline{1} = x \lor \underline{2} \le x)$
- $\forall x\,(\underline{0} = x \lor \underline{1} = x \lor \underline{2} = x \lor \underline{3} \le x)$

usw.

Die Ordnung $\le^{\mathfrak{A}}$ besteht damit aus einer Kopie von $(\mathbb{N}, \le^{\mathfrak{N}})$, gefolgt von Kopien von $(\mathbb{Z}, \le^{\mathbb{Z}})$.

Skizze von $(A, \le^{\mathfrak{A}})$:



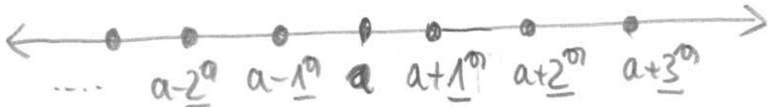
Außerdem erfüllt $\mathfrak{A}$ für jedes $m, n \in \mathbb{N}$ die beiden folgenden $\mathrm{FO}[\sigma_{Ar}]$-Sätze, die zu $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ gehören:

- $\underline{m} + \underline{n} = \underline{m+n}$
- $\underline{m} \times \underline{n} = \underline{m \cdot n}$.

Daraus folgt, dass $\mathfrak{N}$ isomorph ist zu der Einschränkung von $\mathfrak{A}$ auf die Menge $\{\underline{n}^{\mathfrak{A}} : n \in \mathbb{N}\}$.

Außerdem gilt:

Ist $a \in A$ ein Element, das in einer der Kopien von $(\mathbb{Z}, \leq^{\mathbb{Z}})$ liegt, so sieht diese Kopie von $(\mathbb{Z}, \leq^{\mathbb{Z}})$ folgendermaßen aus:



Daher gilt: das Element $(a +^{\mathfrak{A}} a)$ muss in einer <u>anderen</u> Kopie von $(\mathbb{Z}, \leq^{\mathbb{Z}})$ liegen.

Analog folgt: für jedes $a^{(i)} := \underbrace{a +^{\mathfrak{A}} \cdots +^{\mathfrak{A}} a}_{i\text{-mal}}$ muss es eine neue Kopie von $(\mathbb{Z}, \leq^{\mathbb{Z}})$ geben.

Man kann auch zeigen, dass zwischen je zwei Kopien von $(\mathbb{Z}, \leq^{\mathbb{Z}})$ in $\mathfrak{A}$ eine weitere Kopie von $(\mathbb{Z}, \leq^{\mathbb{Z}})$ in $\mathfrak{A}$ liegen muss.