Dazu gehen wir in 2 Schritten vor, die in den beiden folgenden Lemmas durchgeführt werden:

<u>Lemma 7.41</u>

Sei σ eine abzählbare Signatur und sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge mit

$$|\,Var \setminus frei(\Phi)\,| = \infty . \qquad (*)$$

Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Psi \subseteq FO[\sigma]$ mit $\Phi \subseteq \Psi$, so dass Ψ Beispiele enthält.

(<u>Bemerkung</u>: Die Voraussetzung $(*)$ ist wichtig; vergleiche Aufgabe 4 auf Übungsblatt 9)

<u>Beweis</u>: Sei $\exists x_0 \varphi_0$, $\exists x_1 \varphi_1$, $\exists x_2 \varphi_2$, ... eine Aufzählung aller $FO[\sigma]$-Formeln, die mit einem $\exists$-Quantor beginnen.

(Beachte: Eine solche Aufzählung existiert, da σ abzählbar ist. Details: Übung).

Induktiv definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel ψ_n wie folgt:

<u>$n = 0$</u>:

Sei y_0 die erste Variable in Var, die <u>nicht</u> in $\text{frei}(\Phi \cup \{\varphi_0\})$ vorkommt.

(Diese Variable existiert, da $|\text{Var} \setminus \text{frei}(\Phi)| = \infty$ ist und daher $\text{Var} \setminus \text{frei}(\Phi \cup \{\varphi_0\}) \neq \emptyset$.)

Setze $\psi_0 := \left(\exists x_0 \varphi_0 \rightarrow \varphi_0 \frac{y_0}{x_0} \right)$.

<u>$n \to n+1$</u>:

Sei y_{n+1} die erste Variable in Var, die <u>nicht</u> in $\text{frei}(\Phi \cup \{\psi_0, \ldots, \psi_n\} \cup \{\varphi_{n+1}\})$ vorkommt.

(Diese Variable existiert, da $|\text{Var} \setminus \text{frei}(\Phi)| = \infty$ ist und daher $\text{Var} \setminus \text{frei}(\Phi \cup \{\psi_0, \ldots, \psi_n\} \cup \{\varphi_{n+1}\}) \neq \emptyset$.)

Setze $\psi_{n+1} := \left(\exists x_{n+1} \varphi_{n+1} \rightarrow \varphi_{n+1} \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \right)$

Sei $\Psi_0 := \Phi$,

$\Psi_1 := \Phi \cup \{\psi_0\}$,

$\Psi_2 := \Phi \cup \{\psi_0, \psi_1\}$, und allgemein,

für $n \in \mathbb{N}$, $\Psi_n := \Phi \cup \{\psi_0, \dots, \psi_{n-1}\}$.

Außerdem sei $\Psi := \Phi \cup \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n$

Klar: Gemäß Konstruktion von Ψ gilt:

Ψ enthält Beispiele.

Es bleibt zu zeigen, dass Ψ widerspruchsfrei ist.

Behauptung: F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ψ_n ist widerspruchsfrei.

Beweis: Per Induktion nach n.

$n=0$: $\Psi_0 = \Phi$ ist widerspruchsfrei gemäß der Voraussetzung von Lemma 7.41.

$n \to n+1$: Angenommen, Ψ_{n+1} ist widerspruchsvoll.

Gemäß Lemma 7.25 (c) gilt dann:

$$\Psi_{n+1} \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0\, \neg v_0 = v_0 .$$

D.h. es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Psi_{n+1}$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ im Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

Fall 1: $\psi_n \notin \Gamma$.

Dann gilt: $\Gamma \subseteq \Psi_n$, und daher

$\Psi_n \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$.

Gemäß Lemma 7.25 (c) ist Ψ_n also widerspruchsvoll. ↯ Widerspruch zur Induktionsannahme.

Fall 2: $\psi_n \in \Gamma$.

Sei $\Gamma' := \Gamma \setminus \{\psi_n\}$. (Insbes. gilt: $\Gamma' \subseteq_e \Psi_n$)

Da die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist, sind auch die folgenden Sequenzen in $\mathfrak{S}$ ableitbar:

1) $\Gamma', (\neg \exists x_n \varphi_n \vee \varphi_n \frac{y_n}{x_n}) \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$

(da $\Gamma' = \Gamma \cup \{\psi_n\}$ und $\psi_n = (\exists x_n \varphi_n \rightarrow \varphi_n \frac{y_n}{x_n})$)

2) $\Gamma', \neg \exists x_n \varphi_n \vdash \neg \exists x_n \varphi_n$ (V)

3) $\Gamma', \neg \exists x_n \varphi_n \vdash (\neg \exists x_n \varphi_n \vee \varphi_n \frac{y_n}{x_n})$ ($\vee$S)

4) $\Gamma', \neg \exists x_n \varphi_n \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ (KS) auf 3), 1)

5) $\Gamma', \varphi_n \frac{y_n}{x_n} \vdash \varphi_n \frac{y_n}{x_n}$ (V)

6) $\Gamma', \varphi_n \frac{y_n}{x_n} \vdash (\neg \exists x_n \varphi_n \vee \varphi_n \frac{y_n}{x_n})$ (vS)

7) $\Gamma', \varphi_n \frac{y_n}{x_n} \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ (KS) auf 6), 1)

8) $\Gamma', \exists x_n \varphi_n \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ ($\exists$A) auf 7)

9) $\Gamma' \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ (F) auf 9), 4).

D.h. die Sequenz $\Gamma' \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar. Da $\Gamma' \subseteq \Psi_n$ ist, gilt also:

$\Psi_n \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$. Gemäß Lemma 7.25 (c) ist Ψ_n also widerspruchsvoll. $\lightning$ Widerspruch zur Induktionsannahme.

Somit haben wir gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge Ψ_n widerspruchsfrei ist. Da $\Psi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n$ ist, ist daher auch die Menge Ψ widerspruchsfrei (Details: Übung)

$\square_{\text{Lemma 7.41}}$

Lemma 7.42

Sei σ eine abzählbare Signatur und sei $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge.

Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Theta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \subseteq \Theta$, die negationstreu ist.

Beweis: Sei $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine Aufzählung aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln.

(Beachte: Eine solche Aufzählung existiert, da σ abzählbar ist).

Induktiv definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formelmenge Θ_n wie folgt:

$\underline{n=0}$: $\quad \Theta_0 := \Psi$

$\underline{n \to n+1}$: $\quad \Theta_{n+1} := \begin{cases} \Theta_n \cup \{\varphi_n\}, & \text{falls } \Theta_n \cup \{\varphi_n\} \text{ widerspruchsfrei ist} \\ \Theta_n & \text{sonst} \end{cases}$

Sei $\Theta := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Theta_n$.

Behauptung 1: Θ ist negationstreu.

Beweis: Sei φ eine beliebige FO[σ]-Formel.

Da $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ eine Aufzählung aller FO[σ]-Formeln ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi = \varphi_n$ ist.

Wir müssen zeigen, dass $\Theta \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi_n$ oder $\Theta \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi_n$ gilt. Dazu betrachten wir zwei Fälle:

Fall 1: $\varphi_n \in \Theta$.

Dann gilt offensichtlich, dass $\Theta \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi_n$.

Fall 2: $\varphi_n \notin \Theta$.

Dann gilt: $\varphi_n \notin \Theta_{n+1}$ (da $\Theta_{n+1} \subseteq \Theta$).

Gemäß Definition der Menge Θ_{n+1} gilt daher, dass $\Theta_n \cup \{\varphi_n\}$ widerspruchsvoll ist.

Lemma 7.26 (5) liefert, dass $\Theta_n \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi_n$.

$\square$ Beh 1

Behauptung 2: Θ ist widerspruchsfrei.

Beweis: Übung.

Die Gültigkeit von Lemma 7.42 folgt unmittelbar aus Behauptung 1 und Behauptung 2. $\square$ Lemma 7.42

Wir können nun endlich das Erfüllbarkeitslemma für abzählbare Signaturen beweisen:

<u>Lemma 7.43</u> (Erfüllbarkeitslemma für abzählbare Signaturen)

Sei σ eine abzählbare Signatur und sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge.

Dann ist Φ erfüllbar.

<u>Beweis:</u>

Sei Φ' die Formelmenge, die aus Φ entsteht, indem man in jeder Formel aus Φ für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Variable v_i überall ersetzt durch die Variable v_{2i}.

Dann gilt:

1) $\left| \mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\Phi') \right| = \infty$

(da keine der Variablen $v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, \ldots$ in Φ' vorkommt).

2) Φ' ist widerspruchsfrei

(Denn angenommen nicht, dann gilt gemäß Lemma 7.25 (c), dass $\Phi' \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$.

Somit gibt es ein $\Gamma' \subseteq_e \Phi'$ so dass die Sequenz $\Gamma' \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

Sei Γ die Formelmenge, die aus Γ' entsteht, indem jede Variable der Form v_{2i} ersetzt wird durch die Variable v_i.

Durch geeignetes Umbenennen von Variablen in der Ableitung der Sequenz $\Gamma' \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ erhält man eine Ableitung der Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$. Wegen $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist daher Φ widerspruchsvoll.

$\lightning$ Widerspruch)

3) Wenn Φ' erfüllbar ist, dann ist auch Φ erfüllbar

(Denn aus einer Interpretation, die Φ' erfüllt, lässt sich leicht eine Interpretation bilden, die Φ erfüllt)

Wegen 3) genügt es, zu zeigen, dass Φ' erfüllbar ist.

Wegen 1) und 2) erfüllt Φ' die Voraussetzungen von Lemma 7.41. Daher gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Psi \subseteq FO[\sigma]$ mit $\Phi' \subseteq \Psi$, so dass Ψ Beispiele enthält.

Gemäß Lemma 7.42 gibt es eine negationstreue, widerspruchsfreie Formelmenge $\Theta \subseteq FO[\sigma]$ mit $\Psi \subseteq \Theta$. Da Ψ Beispiele enthält, enthält auch Θ Beispiele.

Der Satz von Henkin (Satz 7.40) liefert, dass $[\mathcal{I}_\Theta] \models \Theta$. Wegen $\Phi' \subseteq \Theta$ gilt insbesondere, dass $[\mathcal{I}_\Theta] \models \Phi'$. Somit ist Φ' erfüllbar.

Gemäß 3) ist daher auch Φ erfüllbar.

$\Box_{\text{Lemma 7.43}}$

Insgesamt ist damit der Beweis des Erfüllbarkeitslemmas und damit auch der Beweis des Vollständigkeitssatzes (für den Spezialfall, dass σ eine abzählbare Signatur ist), abgeschlossen.

In den nächsten beiden Kapiteln werden wir noch einige wichtige Sätze kennenlernen, die sich leicht aus dem Vollständigkeitssatz folgern lassen.

Kapitel 8: Der Kompaktheitssatz und der Satz von Löwenheim und Skolem

8.1 Der Kompaktheitssatz

Der Kompaktheitssatz ist auch unter dem Namen Endlichkeitssatz bekannt.
Unter Verwendung der Ergebnisse aus Kapitel 7 kann der Kompaktheitssatz leicht gezeigt werden.

Satz 8.1 (Kompaktheitssatz bzw Endlichkeitssatz)

Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine beliebige Formelmenge

Dann gilt

(a) Φ ist erfüllbar $\iff$ Jede endliche Teilmenge von Φ ist erfüllbar

(b) Für jedes $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$\Phi \models \psi \iff$ Es gibt eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi$ so dass $\Gamma \models \psi$.

Beweis:

(a) Φ erfüllbar

$\Longleftrightarrow$ (Vollständigkeitssatz) Φ widerspruchsfrei

$\Longleftrightarrow$ (Lemma 7.27) Jede endliche Teilmenge von Φ ist widerspruchsfrei

↑ "syntaktisches Endlichkeitslemma"

$\Longleftrightarrow$ (Vollständigkeitssatz) Jede endliche Teilmenge von Φ ist erfüllbar.

(b) "$\Leftarrow$": klar.

"$\Rightarrow$": $\Phi \models \psi \xRightarrow{\text{Vollständigkeitssatz}} \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \psi$

$\Longrightarrow$ es gibt ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$ so dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{S}} \psi$

$\xRightarrow{\text{Vollständigkeitssatz}}$ es gibt ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$ so dass $\Gamma \models \psi$.

$\square$