Der Rest von Kapitel 7 ist dem Beweis des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 7.29) gewidmet.

Dazu sei σ eine abzählbare Signatur, und Φ sei im Folgenden eine fest gewählte widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq FO[\sigma]$.

Ziel: Konstruiere eine zu Φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$.

Im Folgenden werden wir nach und nach eine solche σ-Interpretation $\mathcal{I}$ konstruieren.

Definition 7.30 (Terminterpretationen)

(a) Die σ-Struktur $\mathfrak{A}_\Phi$ ist folgendermaßen definiert:

- $A_\Phi := T_\sigma$

  (d.h. das Universum von $\mathfrak{A}_\Phi$ besteht aus der Menge aller σ-Terme)

- f.a. Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $c^{\mathfrak{A}_\Phi} := c$

- f.a. Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := ar(f)$ und f.a. $t_1, \dots, t_k \in A_\Phi$ ist

  $$f^{\mathfrak{A}_\Phi}(t_1, \dots, t_k) := f(t_1, \dots, t_k)$$

- f.a. Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $k := ar(R)$ ist

  $$R^{\mathfrak{A}_\Phi} := \{ (t_1, \dots, t_k) \in (A_\Phi)^k : \Phi \vdash_\mathfrak{S} R(t_1, \dots, t_k) \}$$

(b) Die Belegung $\beta_\Phi : Var \to A_\Phi$ sei definiert durch $\beta(x) := x$, f.a. $x \in Var$.

(c) Die Struktur $\mathfrak{A}_\Phi$ heißt <u>Termstruktur</u> von Φ.
$\mathfrak{I} := (\mathfrak{A}_\Phi, \beta_\Phi)$ heißt <u>Terminterpretation</u> von Φ.

Beobachtung 7.31

F.a. $R \in \sigma$, für $k := ar(R)$ und f.a. $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$

gilt: $\mathcal{I}_\Phi \models R(t_1, \dots, t_k) \iff \Phi \vdash_\mathfrak{S} R(t_1, \dots, t_k)$

Beweis: $\mathcal{I}_\Phi \models R(t_1, \dots, t_k)$

$$\iff \left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}_\Phi}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} \right) \in R^{\mathcal{A}_\Phi}$$

$$\iff (t_1, \dots, t_k) \in R^{\mathcal{A}_\Phi}$$

$$\iff \Phi \vdash_\mathfrak{S} R(t_1, \dots, t_k)$$

Beobachtung 7.32

F.a. $t_1, t_2 \in T_\sigma$ mit $t_1 \neq t_2$ gilt:

$$\mathcal{I}_\Phi \not\models t_1 = t_2$$

Somit gilt:
Falls es Terme t_1 und t_2 mit $t_1 \neq t_2$ gibt,
so dass $\Phi \vdash_\mathfrak{S} t_1 = t_2$, so gilt: $\mathcal{I}_\Phi \not\models \Phi$.

<u>**Ziel**</u>: Modifiziere $\mathcal{I}_\Phi$ so zu einer σ-Interpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$,
dass f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_\mathfrak{S} \varphi$.

Definition 7.33 (Kongruenzrelation $\sim$ auf T_σ)

Die zweistellige Relation $\sim$ auf T_σ sei folgendermaßen definiert:
f.a. $t, u \in T_\sigma$ gilt: $t \sim u :\iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} t = u$.

Lemma 7.34

(a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf T_σ

(b) F.a. Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := ar(R)$ und f.a. σ-Terme $t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_k \in T_\sigma$ mit $t_1 \sim u_1, t_2 \sim u_2, \dots, t_k \sim u_k$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} R(t_1, \dots, t_k) \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} R(u_1, \dots, u_k)$$

(c) F.a. Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := ar(f)$ und f.a. σ-Terme $t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_k \in T_\sigma$ mit $t_1 \sim u_1, t_2 \sim u_2, \dots, t_k \sim u_k$ gilt:

$$f(t_1, \dots, t_k) \sim f(u_1, \dots, u_k).$$

Beweis: (a): Folgt mit (G), (SG), (TG).
(b): Folgt mit (VR).
(c): Folgt mit (VF). $\square$

Als unmittelbare Folgerung aus Lemma 7.34 erhalten wir:

Korollar 7.35:

Die Relation $\sim$ ist eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}_\Phi$, d.h. es gilt:

(1): $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf A_Φ,

(2): f.a. $R \in \sigma$, für $k := ar(R)$ und f.a. $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in A_\Phi$ mit $a_1 \sim b_1, \dots, a_k \sim b_k$ gilt:

$$\mathfrak{A}_\Phi \models R(a_1, \dots, a_k) \iff \mathfrak{A}_\Phi \models R(b_1, \dots, b_k)$$

und

(3): f.a. $f \in \sigma$, für $k := ar(f)$ und f.a. $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in A_\Phi$ mit $a_1 \sim b_1, \dots, a_k \sim b_k$ gilt:

$$f^{\mathfrak{A}_\Phi}(a_1, \dots, a_k) \sim f^{\mathfrak{A}_\Phi}(b_1, \dots, b_k).$$

Wir betrachten nun die σ-Struktur, die man aus $\mathfrak{M}_\Phi$ erhält, indem man alle bezüglich $\sim$ äquivalenten Elemente in A_Φ miteinander identifiziert.

Definition 7.36 (Die reduzierte Terminterpretation $[\mathfrak{I}_\Phi]$)

(a) Für jedes $a \in A_\Phi$ sei

$$[a] := \{ b \in A_\Phi : b \sim a \}$$

die Äquivalenzklasse von a bezüglich $\sim$ in A_Φ.

(b) Die σ-Struktur $[\mathfrak{M}_\Phi]$ sei folgendermaßen definiert:

(i) Das Universum von $[\mathfrak{M}_\Phi]$ ist die Menge

$$[A_\Phi] := \{ [a] : a \in A_\Phi \}$$

(d.h. $[A_\Phi]$ besteht aus allen Äquivalenzklassen von Elementen in A_Φ)

(ii) F.a. $c \in \sigma$ ist $c^{[\mathfrak{M}_\Phi]} := [c]$

(iii) F.a. $R \in \sigma$ und für $k := ar(R)$ ist

$$R^{[\mathfrak{A}_\Phi]} := \left\{ ([a_1], \dots, [a_k]) : (a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}_\Phi} \right\}$$

(iv) F.a. $f \in \sigma$, für $k := ar(f)$ und f.a. $a_1, \dots, a_k \in A_\Phi$ ist

$$f^{[\mathfrak{A}_\Phi]}([a_1], \dots, [a_k]) := \left[f^{\mathfrak{A}_\Phi}(a_1, \dots, a_k) \right]$$

Beachte: Dies ist wohldefiniert, da gemäß Korollar 7.35 (3) f.a. $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in A_\Phi$ mit $[a_1] = [b_1], \dots, [a_k] = [b_k]$ gilt:

$$\left[f^{\mathfrak{A}_\Phi}(a_1, \dots, a_k) \right] = \left[f^{\mathfrak{A}_\Phi}(b_1, \dots, b_k) \right].$$

(c) Die Belegung $[\beta_\Phi] : Var \to [A_\Phi]$ ist f.a. $x \in Var$ definiert durch $[\beta_\Phi](x) := [x]$.

(d) Die Struktur $[\mathfrak{A}_\Phi]$ heißt reduzierte Termstruktur von Φ.

$[\mathcal{I}_\Phi] := ([\mathfrak{A}_\Phi], [\beta_\Phi])$ heißt reduzierte Terminterpretation von Φ.

Lemma 7.37

(a) F.a. $t \in T_\sigma$ gilt: $[\![t]\!]^{[\mathcal{I}_\Phi]} = [t]$.

(b) Für alle atomaren $FO[\sigma]$-Formeln φ gilt:

$$[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_\mathfrak{S} \varphi.$$

Beweis: einfaches Nachrechnen. Details: Übung. □

Eigentlich würden wir gern zeigen, dass Teil (b) von Lemma 7.37 nicht nur für atomare Formeln, sondern für alle Formeln $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt (... dann wären wir auch mit dem Beweis des Erfüllbarkeitslemmas fertig, da f.a. $\varphi \in \Phi$ natürlich $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \varphi$ gilt).

Leider lässt sich Teil (b) von Lemma 7.37 (b) nur dann auf alle $FO[\sigma]$-Formeln verallgemeinern, wenn die Menge Φ die folgenden Eigenschaften hat:

Definition 7.38

(a) Φ heißt <u>negationstreu</u>, wenn f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \quad \text{oder} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi .$$

(b) Φ <u>enthält Beispiele</u>, wenn für alle $FO[\sigma]$-Formeln der Form $\exists x \varphi$ gilt: Es gibt einen Term $t \in T_\sigma$, so dass

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \left(\exists x \varphi \rightarrow \varphi \frac{t}{x} \right).$$

Lemma 7.39

Sei Φ widerspruchsfrei und negationstreu.
Dann gilt für alle $\varphi, \psi \in FO[\sigma]$:

(a) $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi \iff \Phi \nvdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

(b) $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} (\varphi \vee \psi) \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$ oder $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \psi$

<u>Beweis:</u> (a): "$\Rightarrow$": Gilt, da Φ widerspruchsfrei ist
"$\Leftarrow$": Gilt, da Φ negationstreu ist

(b): "$\Leftarrow$": Folgt unmittelbar aus der Sequenzenregel $(\vee S)$.

"$\Rightarrow$": Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} (\varphi \vee \psi)$

Falls $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$, so gilt gemäß (a), dass

$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi$.

Aus $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} (\varphi \vee \psi)$

folgt mit der Regel (DS) ("Disjunktiver Syllogismus", siehe Lemma 7.19), dass

$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \psi$. $\square$

Der folgende Satz bedeutet, dass das Erfüllbarkeitslemma für alle widerspruchsfreien Formelmengen Φ gilt, die negationstreu sind und Beispiele enthalten.

Satz 7.40 (Der Satz von **Henkin**)

Sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ eine Formelmenge, die widerspruchsfrei und negationstreu ist und die Beispiele enthält.

Dann gilt für jedes $\varphi \in FO[\sigma]$:

$$[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi.$$

(Beachte: Daraus folgt insbes., dass $[\mathcal{I}_\Phi] \models \Phi$).

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von $FO[\sigma]$.

- φ atomar: Lemma 7.37 (b).

- $\varphi = \neg\varphi_1$: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \neg\varphi_1$

$\iff [\mathcal{I}_\Phi] \not\models \varphi_1$

$\overset{\text{Ind.annahme}}{\iff} \Phi \not\vdash_{\mathfrak{S}} \varphi_1$

$\overset{\text{Lemma 7.39 (a)}}{\iff} \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi_1$ ✓

- $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$: $[\mathcal{I}_\Phi] \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)$

$\iff [\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1$ oder $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_2$

$\overset{\text{Ind.annahme}}{\iff} \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi_1$ oder $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi_2$

$\overset{\text{Lemma 7.39(b)}}{\iff} \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ ✓

- $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$:

Übung!

Zur Erinnerung:

In diesem Kapitel fassen wir die Junktoren "$\rightarrow$" und "$\leftrightarrow$" als Abkürzungen für die entsprechenden Kombinationen aus $\wedge, \vee, \neg$ auf. Daher betrachten wir "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$" in diesem Beweis nicht.

- $\varphi = \exists x \varphi_1$:

"$\Rightarrow$": Es gelte $[\mathcal{I}_\Phi] \models \exists x \varphi_1$.

$\Rightarrow$ es gibt ein $t \in T_\sigma$ s.d. $[\mathcal{I}_\Phi]\frac{[t]}{x} \models \varphi_1$

$\Rightarrow$ es gibt ein $t \in T_\sigma$ s.d. $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1 \frac{t}{x}$

Substitutionslemma;
beachte: $[t] = [\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi}$

$\Rightarrow$ es gibt ein $t \in T_\sigma$ s.d. $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi_1 \frac{t}{x}$

Ind.annahme

$\Rightarrow$ $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists x \varphi_1$. ✓

Sequenzenregel
($\exists$S)

"$\Leftarrow$": Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists x \varphi_1$.

Nach Voraussetzung enthält Φ Beispiele, d.h. es gibt ein $t \in T_\sigma$ s.d. $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} (\exists x \varphi_1 \to \varphi_1 \frac{t}{x})$.

Somit gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists x \varphi_1$
und $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} (\exists x \varphi_1 \to \varphi_1 \frac{t}{x})$.

Die ableitbare Sequenzenregel (MP) ("Modus Ponens", siehe Lemma 7.19) liefert, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi_1 \frac{t}{x}$.

Gemäß Ind.annahme folgt, dass $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1 \frac{t}{x}$.

Substitutionslemma und $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} = [t]$ liefern, dass $[\mathcal{I}_\Phi]\frac{[t]}{x} \models \varphi_1$. Somit: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \exists x \varphi_1$. ✓

- $\underline{\varphi = \forall x \varphi_1}$:

"$\Rightarrow$": Es gelte $[\mathcal{I}_\Phi] \models \forall x \varphi_1$.

$\Rightarrow$ f.a. $t \in T_\sigma$ gilt: $[\mathcal{I}_\Phi]\frac{[t]}{x} \models \varphi_1$

$\Rightarrow$ f.a. $t \in T_\sigma$ gilt: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1 \frac{t}{x}$
Subst.lemma

$\Rightarrow$ f.a. $t \in T_\sigma$ gilt: $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \varphi_1 \frac{t}{x}$ (*)
Ind.annahme

Angenommen, $\Phi \not\vdash_\mathfrak{S} \forall x \varphi_1$. Die Negationstreue von Φ liefert dann, dass $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \neg \forall x \varphi_1$.

Die Quantorenaustauschregeln (QA) (siehe Lemma 7.20) liefern dann, dass $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \exists x \neg \varphi_1$.

Da Φ Beispiele enthält, gibt es einen Term $u \in T_\sigma$ s.d. $\Phi \vdash_\mathfrak{S} (\exists x \neg \varphi_1 \rightarrow \neg \varphi_1 \frac{u}{x})$.

Die Regel (MP) liefert, dass $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \neg \varphi_1 \frac{u}{x}$.

(*) liefert, dass auch $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \varphi_1 \frac{u}{x}$ $\lightning$ Widerspruch zu "Φ wid.frei".

"$\Leftarrow$": Es gelte $\Phi \vdash_\mathfrak{S} \forall x \varphi_1$.

D.h. es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$ s.d. die Sequenz $\Gamma \vdash \forall x \varphi_1$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist

Sei $t \in T_\sigma$ beliebig. Dann sind folgende Sequenzen in $\mathfrak{S}$ ableitbar:

1) $\Gamma \vdash \forall x \varphi_1$

2) $\Gamma, \varphi_1 \frac{t}{x} \vdash \varphi_1 \frac{t}{x}$ (V)

3) $\Gamma, \forall x \varphi_1 \vdash \varphi_1 \frac{t}{x}$ ($\forall$A)

4) $\Gamma \vdash \varphi_1 \frac{t}{x}$ (KS) auf 1), 3)

Somit gilt für jedes $t \in T_\sigma$, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi_1 \frac{t}{x}$.

Die Ind.annahme liefert, dass für jedes $t \in T_\sigma$ gilt: $[\mathfrak{I}_\Phi] \models \varphi_1 \frac{t}{x}$

Somit: $[\mathfrak{I}_\Phi] \models \forall x \varphi_1$. ✓

Dies schließt den Beweis des Satzes von Henkin ab. $\square$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass man jede widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ erweitern kann zu einer Menge $\Theta \supseteq \Phi$, die widerspruchsfrei und negationstreu ist und Beispiele enthält.

Um dies zu zeigen, werden wir nutzen, dass die Signatur σ abzählbar ist.