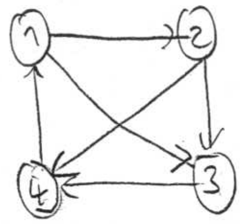
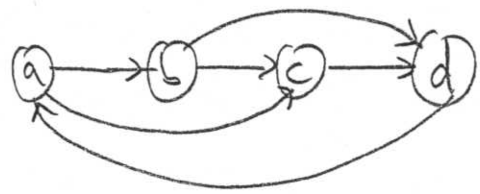
Beispiel 1.11

(a) Die beiden Graphen



und

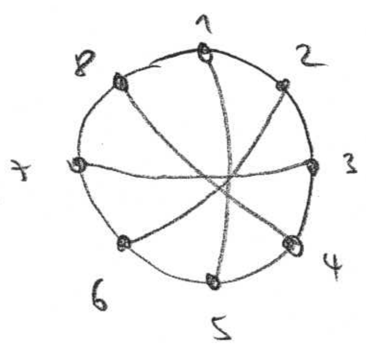


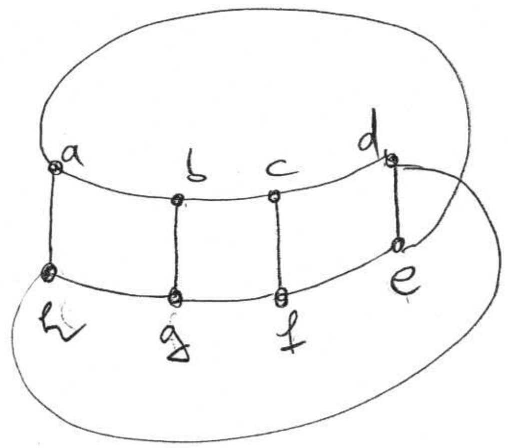
sind isomorph via

$$\pi : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{a,b,c,d\}$$

mit $\pi(1) = a$, $\pi(2) = b$, $\pi(3) = c$, $\pi(4) = d$

(b) Die beiden Graphen





sind isomorph via $\pi : \{1,\dots,8\} \to \{a,\dots,h\}$ mit

	1	2	3	4	5	6	7	8
π	a	b	c	d	h	g	f	e

(c) Die beiden Graphen

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \qquad \text{und} \qquad a \longrightarrow b \longleftarrow c$$

sind nicht isomorph

(d) Sei $\sigma = \{f, c\}$, wobei f ein 2-stelliges Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol ist.

Sei $\mathfrak{A} = (A, f^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}})$ mit

- $A := \mathbb{N}$
- $f^{\mathfrak{A}} := +^{\mathbb{N}}$ (die Addition auf $\mathbb{N}$)
- $c^{\mathfrak{A}} := 0^{\mathbb{N}}$ (die nat. Zahl 0)

und sei $\mathfrak{B} = (B, f^{\mathfrak{B}}, c^{\mathfrak{B}})$ mit

- $B := \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ (die Menge aller Zweierpotenzen)
- $f^{\mathfrak{B}} : B \times B \to B$ die Funktion mit
  $$f^{\mathfrak{B}}(b_1, b_2) := b_1 \cdot b_2 \quad (\text{f.a. } b_1, b_2 \in B)$$
- $c^{\mathfrak{B}} := 1 = 2^0 \in B$.

Dann gilt: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, und die Abbildung $\pi : A \to B$ mit $\pi(n) := 2^n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, denn:

- π ist eine bijektive Abbildung von A nach B
- Für das Konstantensymbol $c \in \sigma$ gilt

$$\pi(c^{\mathfrak{A}}) \underset{\substack{\text{Def} \\ c^{\mathfrak{A}}=0}}{=} \pi(0) \underset{\text{Def}\,\pi}{=} 2^0 = 1 \underset{\substack{\text{Def} \\ c^{\mathfrak{B}}=1}}{=} c^{\mathfrak{B}}$$

- Für das Funktionssymbol $f \in \sigma$ und für alle $(a_1, a_2) \in A^2$ gilt:

$$\pi\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1,a_2)\right) \underset{\substack{\text{Def} \\ f^{\mathfrak{A}}}}{=} \pi\left(a_1 + a_2\right) \underset{\text{Def}\,\pi}{=} 2^{a_1+a_2}$$

und

$$f^{\mathfrak{B}}\left(\pi(a_1), \pi(a_2)\right) \underset{\text{Def}\,\pi}{=} f^{\mathfrak{B}}\left(2^{a_1}, 2^{a_2}\right) \underset{\text{Def}\,f^{\mathfrak{B}}}{=} 2^{a_1} \cdot 2^{a_2} = 2^{a_1+a_2}$$

Also: $\pi\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1,a_2)\right) = f^{\mathfrak{B}}\left(\pi(a_1), \pi(a_2)\right)$.

Somit ist π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

<u>Satz 1.12</u>

Isomorphie ($\cong$) ist eine <u>Äquivalenzrelation</u> auf der Klasse aller σ-Strukturen, d.h. für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gilt:

1) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$ (Reflexivität)
2) falls $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ (Symmetrie)
3) falls $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}$, so auch $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$. (Transitivität)

<u>Beweis</u>: Übung.

1.2 Syntax der Logik erster Stufe

Bestandteile:

- aussagenlogische Junktoren

  $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  "nicht" "und" "oder" "wenn ... dann" "genau dann, wenn"

- Variablen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ um Elemente aus dem Universum einer Struktur zu bezeichnen

- Quantoren:
  $\exists$ ("es existiert") , $\forall$ ("für alle")

- Symbole für Elemente aus der Signatur σ

Präzise:

Definition 1.13 (Variablen und Alphabet der Logik erster Stufe)

(a) Eine Individuenvariable (kurz: Variable) hat die Form v_i , für $i \in \mathbb{N}$.
Die Menge aller Variablen bezeichnen wir mit Var. D.h

$$\begin{aligned} \mathrm{Var} &:= \{ v_i : i \in \mathbb{N} \} \\ &= \{ v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots \}. \end{aligned}$$

(b) Sei σ eine Signatur.

Das Alphabet A_σ der Logik erster Stufe über σ besteht aus

- den Variablen in Var
- den Symbolen in σ
- den Quantoren $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor)
- dem Gleichheitssymbol $=$ (Bemerkung: Manche Bücher schreiben $\equiv$ an Stelle von $=$)
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- den Klammern $($, $)$

Dh:

$$A_\sigma = \text{Var} \cup \sigma \cup \{\exists, \forall\} \cup \{=\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{(,)\}$$

Notation: A_σ^* bezeichnet die Menge aller endlichen Zeichenketten über A_σ.

Definition 1.14 (Terme der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur.

Die Menge T_σ der σ-Terme ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von A_σ^*:

- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c \in T_\sigma$
- Für jede Variable $x \in \text{Var}$ ist $x \in T_\sigma$
- Für jedes $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und jedes k-stellige Funktionssymbol

$f \in \sigma$ gilt: Sind $t_1 \in T_\sigma, \dots, t_k \in T_\sigma$, so ist auch $ft_1 \cdots t_k \in T_\sigma$.

Beispiel 1.15:

Sei $\sigma = \{ \underset{2}{f}, c \}$ wie in Beispiel 1.11 (d) gewählt.

Folgende Worte aus A_σ^* sind σ-Terme:

- c
- v_4
- fcc
- fcv_0
- $fcfv_1v_3$

Folgende Worte aus A_σ^* sind keine σ-Terme:

- 0
- $f(c,c)$
- fv_0cv_1
- $f^{\Omega}(2,3)$

Definition 1.16: (Formeln der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur.

Die Menge $FO[\sigma]$ aller Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ (kurz: $FO[\sigma]$-Formeln;

FO steht für die englische Bezeichnung: first-order logic) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von A_σ^*:

(1) Für alle σ-Terme t_1 und t_2 gilt:

$$t_1 = t_2 \quad \in FO[\sigma]$$

(2) Für jedes $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ der Stelligkeit k und für alle σ-Terme $t_1, \dots, t_k$ gilt:

$$R t_1 \cdots t_k \quad \in FO[\sigma].$$

(3) Ist $\varphi \in FO[\sigma]$, so auch $\neg\varphi \in FO[\sigma]$

(4) Ist $\varphi \in FO[\sigma]$ und $\psi \in FO[\sigma]$, so ist auch

- $(\varphi \wedge \psi) \in FO[\sigma]$
- $(\varphi \vee \psi) \in FO[\sigma]$
- $(\varphi \rightarrow \psi) \in FO[\sigma]$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in FO[\sigma]$

(5) Ist $\varphi \in FO[\sigma]$ und ist $x \in Var$, so ist auch

- $\exists x\, \varphi \quad \in FO[\sigma]$
- $\forall x\, \varphi \quad \in FO[\sigma]$.

Bemerkung: • $FO[\sigma]$-Formeln der Form $t_1 = t_2$ bzw. $R t_1 \cdots t_k$ heißen auch atomare σ-Formeln.

- In manchen Büchern wird $FO[\sigma]$ auch mit L_σ bzw L^σ bezeichnet, und $FO[\sigma]$-Formeln werden auch <u>σ-Ausdrücke</u> genannt.

<u>Beispiel 1.17.</u>

<u>a)</u> Sei $\sigma = \{ \underset{2}{f}, c \}$.

Folgende Worte aus A_σ^* sind $FO[\sigma]$-Formeln:

- $f v_0 v_1 = c$
- $\forall v_2 \, f v_2 c = v_2$
- $\neg \exists v_3 \, (f v_2 v_3 = v_3 \wedge \neg v_3 = c)$

Folgende Worte aus A_σ^* sind <u>keine</u> $FO[\sigma]$-Formeln:

- $(f v_0 v_1 = c)$
- $f v_0 v_1$ (... ist ein σ-Term, aber keine $FO[\sigma]$-Formel)
- $(\forall v_2 \, (f v_2 c = v_2))$
- $\exists c \, f(v_0, c) = v_0$

<u>Beachte:</u> In Termen und atomaren Formeln setzen wir keine Klammern und keine Kommas!

(b) Sei $\sigma_{Graph} = \{ \underset{2}{E} \}$.

Folgendes ist eine $FO[\sigma_{Graph}]$-Formel:

$$\forall v_0 \forall v_1 \left(\left(E v_0 v_1 \wedge E v_1 v_0 \right) \to v_0 = v_1 \right)$$

<u>Intuition zur Semantik</u> (formale Definition der Semantik: demnächst, in Abschnitt 1.3):

In einem Graphen $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ sagt die Formel $\forall v_0 \forall v_1 \left(\left(E v_0 v_1 \wedge E v_1 v_0 \right) \to v_0 = v_1 \right)$ folgendes aus:

"für alle Knoten $a_0 \in A$ und
für alle Knoten $a_1 \in A$ gilt:
Falls $(a_0, a_1) \in E^{\mathfrak{A}}$ und $(a_1, a_0) \in E^{\mathfrak{A}}$,
so ist $a_0 = a_1$"

Die Formel sagt in einem Graphen $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ also gerade aus, dass die Kantenrelation "antisymmetrisch" ist. D.h.:
Ein Graph $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ <u>erfüllt</u> die Formel genau dann, wenn die Kantenrelation $E^{\mathfrak{A}}$ antisymmetrisch ist.

Notation 1.18:

- Statt mit $v_0, v_1, v_2, \ldots$ bezeichnen wir Variablen oft auch mit $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
- Formeln bezeichnen wir meistens mit griechischen Kleinbuchstaben $\varphi, \psi, \chi, \ldots$, Formelmengen mit griechischen Großbuchstaben $\Phi, \Psi, \ldots$
- Bezüglich Klammerung verwenden wir folgende Bindungsregeln:
  1) $\neg$ bindet stärker als alle anderen Junktoren
  2) $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$
  3) Die äußeren Klammern einer Formel lassen wir manchmal weg

  (D.h. wir schreiben z.B. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$ an Stelle von $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$)
- Für gewisse 2-stellige Funktionssymbole wie $+, \times \in \sigma_{Ar}$ und gewisse 2-stellige Relationssymbole wie $\leq$ verwenden wir Infix- statt Präfixschreibweise und setzen Klammern dabei auf natürliche Weise, um die eindeutige Lesbarkeit zu gewährleisten.

  Beispiel: An Stelle des (formal korrekten) Terms

  $\times + v_1 v_2 v_2$ schreiben wir $(v_1 + v_2) \times v_2$

  An Stelle der (formal korrekten) atomaren Formel $\leq v_1 v_2$ schreiben wir $v_1 \leq v_2$.

- Zur besseren Lesbarkeit von Termen und atomaren Formeln schreiben wir manchmal
  - $R(t_1, \dots, t_k)$ an Stelle des (formal korrekten) $Rt_1 \cdots t_k$
  - $f(t_1, \dots, t_k)$ an Stelle des (formal korrekten) $ft_1 \cdots t_k$.

1.3. Semantik der Logik erster Stufe

Um die formale Definition der Semantik der Logik erster Stufe angeben zu können, benötigen wir noch folgende Notationen:

Definition 1.19 (Subformeln / Teilformeln)

Für jede $FO[\sigma]$-Formel φ definieren wir die Menge

$$sub(\varphi) \subseteq FO[\sigma]$$

aller Subformeln (oder: Teilformeln) von φ wie folgt:

- Ist φ eine atomare σ-Formel, so $sub(\varphi) := \{\varphi\}$
- Ist φ von der Form $\neg\psi$ für eine $FO[\sigma]$-Formel ψ, so ist $sub(\varphi) := \{\varphi\} \cup sub(\psi)$
- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und $FO[\sigma]$-Formeln ψ_1 und ψ_2, so ist

$\mathrm{sub}(\varphi) := \{\varphi\} \cup \mathrm{sub}(\psi_1) \cup \mathrm{sub}(\psi_2)$

- Ist φ von der Form $Qx\psi$ für $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathrm{Var}$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist
  $\mathrm{sub}(\varphi) := \{\varphi\} \cup \mathrm{sub}(\psi)$

<u>Beispiel:</u>

$\mathrm{sub}\Big(\forall v_0 \forall v_1 \big((Ev_0v_1 \wedge Ev_1v_0) \rightarrow v_0 = v_1\big)\Big) =$

$\{ \forall v_0 \forall v_1 \big((Ev_0v_1 \wedge Ev_1v_0) \rightarrow v_0 = v_1\big),$
$\forall v_1 \big((Ev_0v_1 \wedge Ev_1v_0) \rightarrow v_0 = v_1\big),$
$\big((Ev_0v_1 \wedge Ev_1v_0) \rightarrow v_0 = v_1\big),$
$(Ev_0v_1 \wedge Ev_1v_0),$
$v_0 = v_1,$
$Ev_0v_1,$
$Ev_1v_0 \}$

<u>Definition 1.20</u> (Variablen in Termen)

Für jeden σ-Term $t \in T_\sigma$ definieren wir die Menge
$\mathrm{var}(t) \subseteq \mathrm{Var}$
der <u>Variablen von t</u> wie folgt:

- Für $x \in \mathrm{Var}$ ist $\mathrm{var}(x) := \{x\}$
- Für Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $\mathrm{var}(c) := \emptyset$
- Ist $t \in T_\sigma$ von der Form $ft_1 \dots t_k$, wobei $f \in \sigma$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$, so ist $\mathrm{var}(t) := \mathrm{var}(t_1) \cup \dots \cup \mathrm{var}(t_k)$.

Definition 1.21 (Freie Variablen in Formeln)

Für jede $FO[\sigma]$-Formel φ definieren wir die Menge $\text{frei}(\varphi) \subseteq \text{Var}$ aller freien Variablen von φ wie folgt:

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so ist
  $$\text{frei}(\varphi) := \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2)$$
- Ist φ von der Form $Rt_1 \cdots t_k$, wobei $R \in \sigma$ ein k-stelliges Relationssymbol ist und $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$, so ist
  $$\text{frei}(\varphi) := \text{var}(t_1) \cup \dots \cup \text{var}(t_k)$$
- Ist φ von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in FO[\sigma]$, so ist
  $$\text{frei}(\varphi) := \text{frei}(\psi)$$
- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und $\psi_1, \psi_2 \in FO[\sigma]$, so ist
  $$\text{frei}(\varphi) := \text{frei}(\psi_1) \cup \text{frei}(\psi_2)$$
- Ist φ von der Form $Qx\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \text{Var}$ und $\psi \in FO[\sigma]$, so ist
  $$\text{frei}(\varphi) := \text{frei}(\psi) \setminus \{x\}$$

Beispiel:

$$\varphi := \underbrace{\Big(\underbrace{fv_0c = v_3}_{\substack{\text{freie Variablen:} \\ v_0,\, v_3}} \wedge \underbrace{\exists v_0 \underbrace{fv_0v_1 = c}_{\substack{\text{freie Variablen:} \\ v_0,\, v_1}}}_{\text{freie Variablen: } v_1} \Big)}_{\text{freie Variablen: } v_0,\, v_1,\, v_3}$$

Definition 1.22 (Sätze)

Eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ heißt Satz (genauer: $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz), falls $\mathrm{frei}(\varphi) = \emptyset$.

Die Menge aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätze bezeichnen wir mit S_σ.

Definition 1.23 (Belegungen und Interpretationen)

(a) Eine Belegung in einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung $\beta: D \to A$ mit $\mathrm{Def}(\beta) := D \subseteq \mathrm{Var}$.

(b) Eine Belegung β ist eine Belegung für eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ (bzw: passend zu φ), wenn $\mathrm{Def}(\beta) \supseteq \mathrm{frei}(\varphi)$.

(c) Eine σ-Interpretation ist ein Paar

$$\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$$

bestehend aus einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β in $\mathfrak{A}$.

(d) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ ist eine Interpretation für eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ (bzw: passend zu φ bzw. eine Interpretation für φ), wenn β passend zu φ ist.

(e) $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ heißt passend zu $t \in T_\sigma$, falls $\mathrm{Def}(\beta) \supseteq \mathrm{var}(t)$.

Definition 1.24 (Semantik von σ-Termen)

Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^\cdot$, die jedem σ-Term $t \in T_\sigma$ und jeder zu t passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuordnet:

- Für alle $x \in \mathrm{Var}$ ist $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $[\![c]\!]^{\mathcal{I}} := c^{\mathcal{A}}$
- Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle σ-Terme $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$ ist
$$[\![f t_1 \cdots t_k]\!]^{\mathcal{I}} := f^{\mathcal{A}}\left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\right).$$

Beispiel:

$\sigma := \{\underset{2}{f}, c\}$, $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ mit $A := \mathbb{N}$, $f^{\mathcal{A}} := +^{\mathbb{N}}$ (die Addition auf $\mathbb{N}$), $c^{\mathcal{A}} := 0$.

Sei β die Belegung mit $\beta(v_1) = 1$ und $\beta(v_2) = 7$ und sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$. Sei $t := f v_2 f v_1 c \in T_\sigma$.

Dann gilt:
$$\begin{aligned}
[\![t]\!]^{\mathcal{I}} &= f^{\mathcal{A}}\left([\![v_2]\!]^{\mathcal{I}}, [\![f v_1 c]\!]^{\mathcal{I}}\right) = [\![v_2]\!]^{\mathcal{I}} + [\![f v_1 c]\!]^{\mathcal{I}} \\
&= \beta(v_2) + f^{\mathcal{A}}\left([\![v_1]\!]^{\mathcal{I}}, [\![c]\!]^{\mathcal{I}}\right) \\
&= 7 + \left(\beta(v_1) + c^{\mathcal{A}}\right) = 7 + (1+0) = 8.
\end{aligned}$$