Beweis:

zu 1):

1) $\Gamma \vdash \neg\forall x\, \varphi$ (Voraussetzung)

2) $\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x} \vdash \neg\varphi\frac{y}{x}$ (V); sei $y \notin$ frei$(\Gamma, \forall x \varphi)$

3) $\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x} \vdash \exists x\, \neg\varphi$ ($\exists$S) auf 2) mit $t = y$

4) $\Gamma, \neg\exists x\, \neg\varphi \vdash \varphi\frac{y}{x}$ (KP) auf 3)

5) $\Gamma, \neg\exists x\, \neg\varphi \vdash \forall x\, \varphi$ ($\forall$S) auf 4)

6) $\Gamma, \neg\forall x\, \varphi \vdash \exists x\, \neg\varphi$ (KP) auf 5)

7) $\Gamma \vdash \exists x\, \neg\varphi$ (KS) auf 1), 6)

zu 2):

1) $\Gamma \vdash \exists x\, \neg\varphi$ (Voraussetzung)

2) $\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \varphi\frac{y}{x}$ (V); sei $y \notin$ frei$(\Gamma, \forall x \varphi)$

3) $\Gamma, \forall x\, \varphi \vdash \varphi\frac{y}{x}$ ($\forall$A)

4) $\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x} \vdash \neg\forall x\, \varphi$ (KP) auf 3)

5) $\Gamma, \exists x\, \neg\varphi \vdash \neg\forall x\, \varphi$ ($\exists$A) auf 4)

6) $\Gamma \vdash \neg\forall x\, \varphi$ (KS) auf 1), 5)

zu 3) und 4): analog.

$\square$

Lemma 7.21 (Ableitbare Gleichheitsregeln)

Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar

(f.a. $\Gamma \subseteq_e FO[\sigma]$, f.a. $t, u, t_1, u_1, t_2, u_2, \ldots \in T_\sigma$).

- Symmetrie der Gleichheit (SG):

$$\frac{\Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash u = t}$$

- Transitivität der Gleichheit (TG):

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash t_1 = t_2 \\ \Gamma \vdash t_2 = t_3\end{array}}{\Gamma \vdash t_1 = t_3}$$

- Verträglichkeitsregeln für die Gleichheit:

(VR): f.a. Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $r := ar(R)$

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash R(t_1, \ldots, t_r) \\ \Gamma \vdash t_1 = u_1 \\ \vdots \\ \Gamma \vdash t_r = u_r\end{array}}{\Gamma \vdash R(u_1, \ldots, u_r)}$$

(VF): f.a. Funktionssymbole $f \in \sigma$ und für $r := ar(f)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash t_1 = u_1 \\ \vdots \\ \Gamma \vdash t_r = u_r\end{array}}{\Gamma \vdash f(t_1, \ldots, t_r) = f(u_1, \ldots, u_r)}$$

Beweis:

- (SG):

1) $\Gamma \vdash t = u$ (Voraussetzung)
2) $\Gamma \vdash t = t$ (G)
3) $\Gamma, t = u \vdash u = t$ (S) auf 2) mit $\varphi := x = t$
4) $\Gamma \vdash u = t$ (KS) auf 1), 3)

- (TG):

1) $\Gamma \vdash t_1 = t_2$ (Voraussetzung)
2) $\Gamma \vdash t_2 = t_3$ (Voraussetzung)
3) $\Gamma, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$ (S) auf 1) mit $\varphi := t_1 = x,\ t := t_2,\ u := t_3$
4) $\Gamma \vdash t_1 = t_3$ (KS) auf 2), 3)

- (VR): Beweis für $r = 2$ (für andere r: analog)

1) $\Gamma \vdash R(t_1, t_2)$ (Voraussetzung)
2) $\Gamma \vdash t_1 = u_1$ (Voraussetzung)
3) $\Gamma \vdash t_2 = u_2$ (Voraussetzung)
4) $\Gamma, t_1 = u_1 \vdash R(u_1, t_2)$ (S) auf 1)
5) $\Gamma \vdash R(u_1, t_2)$ (KS) auf 2), 4)
6) $\Gamma, t_2 = u_2 \vdash R(u_1, u_2)$ (S) auf 5)
7) $\Gamma \vdash R(u_1, u_2)$ (KS) auf 3), 6)

- (VF): Beweis für $r=2$ (für andere r: analog)

1) $\Gamma \vdash t_1 = u_1$ (Voraussetzung)

2) $\Gamma \vdash t_2 = u_2$ (Voraussetzung)

3) $\Gamma \vdash f(t_1, t_2) = f(t_1, t_2)$ (G)

4) $\Gamma, t_1 = u_1 \vdash f(t_1, t_2) = f(u_1, t_2)$

(S) auf 3) mit
$\varphi := f(t_1, t_2) = f(x, t_2)$

5) $\Gamma \vdash f(t_1, t_2) = f(u_1, t_2)$ (KS) auf 1), 4)

6) $\Gamma, t_2 = u_2 \vdash f(t_1, t_2) = f(u_1, u_2)$

(S) auf 5) mit
$\varphi := f(t_1, t_2) = f(u_1, x)$

7) $\Gamma \vdash f(t_1, t_2) = f(u_1, u_2)$ (KS) auf 2), 6)

Dies schließt den Beweis von Lemma 7.21 ab.

$\square$

7.4 Widerspruchsfreiheit und das syntaktische Endlichkeitslemma

Definition 7.22 (Widerspruchsfreiheit)

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) Φ heißt <u>widerspruchsvoll</u>, falls es ein $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi$.

(d.h.: Φ ist widerspruchsvoll, falls sich im Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ein Widerspruch herleiten lässt).

(b) Φ heißt <u>widerspruchsfrei</u>, falls Φ nicht widerspruchsvoll ist.

Definition 7.23 (Erfüllbarkeit)

Eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ heißt <u>erfüllbar</u>, falls es eine zu Φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$ gibt.

Aus Korollar 7.16 folgt direkt, dass erfüllbare Formelmengen widerspruchsfrei sind:

Korollar 7.24

Für alle $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \text{ erfüllbar } \Rightarrow \Phi \text{ widerspruchsfrei}$$

Beweis:

Sei Φ erfüllbar, und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine zu Φ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Phi$.

Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll.

Dann gibt es gemäß Definition 7.22 ein $\varphi \in FO[\sigma]$ so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi$.

Aus Korollar 7.16 folgt, dass $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$.

Natürlich können wir den Definitionsbereich von $\mathcal{I}$ so erweitern, dass $\mathcal{I}$ zu φ passt.

Wegen $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$ gilt dann: $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$ $\lightning$ Widerspruch.

$\square$

Eine Variante des Vollständigkeitssatzes besagt, dass auch die Umkehrung von Korollar 7.24 gilt, d.h. es gilt:

Φ ist erfüllbar $\iff$ Φ ist widerspruchsfrei.

Im Rest von Kapitel 7 werden wir den Vollständigkeitssatz ($\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$) dadurch beweisen, dass wir

1) zeigen, dass jede widerspruchsfreie Formelmenge Φ tatsächlich erfüllbar ist
(dies ist die Aussage des so genannten <u>Erfüllbarkeitslemmas</u>, siehe Abschnitt 7.5)

und

2) zeigen, dass aus dem Erfüllbarkeitslemma folgt, dass für alle $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und alle $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: Falls $\Phi \models \varphi$, so $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Um 1) und 2) zu erreichen, werden wir die im Folgenden zusammengestellten Eigenschaften widerspruchsfreier bzw. widerspruchsvoller Formelmengen benutzen.

Lemma 7.25

Für alle $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ gilt:

(a) Φ ist widerspruchs<u>frei</u> $\iff$ es gibt ein $\varphi \in FO[\sigma]$ so dass $\underbrace{\Phi \not\vdash_{\mathfrak{G}} \varphi}$

(Notation für "es gilt nicht, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{G}} \varphi$")

(b) Φ ist widerspruchs<u>voll</u> $\iff$ für alle $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{G}} \varphi$.

(c) Φ ist widerspruchs<u>voll</u> $\iff$ $\Phi \vdash_{\mathfrak{G}} \exists v_0 \, \neg v_0 = v_0$

<u>Beweis:</u>

(a): "$\Longrightarrow$": Sei Φ widerspruchsfrei.

Sei φ eine beliebige $FO[\sigma]$-Formel.

Da Φ widerspruchs<u>frei</u> ist, gilt gemäß Definition 7.22, dass $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{G}} \varphi$ oder $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{G}} \neg\varphi$.

"$\Longleftarrow$": Sei $\varphi \in FO[\sigma]$ so dass $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{G}} \varphi$.

Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll.

Dann gibt es ein $\psi \in FO[\sigma]$, so dass

$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \psi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\psi$.

Gemäß Definition 7.14 gibt es dann

$\Gamma_1 \subseteq_e \Phi$ und $\Gamma_2 \subseteq_e \Phi$ so dass die Sequenzen

$\Gamma_1 \vdash \psi$ und $\Gamma_2 \vdash \neg\psi$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar sind.

Dann ist auch folgendes in $\mathfrak{S}$ ableitbar:

1) $\Gamma_1 \vdash \psi$
2) $\Gamma_2 \vdash \neg\psi$
3) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi$ (E) auf 1)
4) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg\psi$ (E) auf 2)
5) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi$ (W) auf 3), 4)

Somit gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$. ↯

$\square$ Beweis von (a)

(b): folgt direkt aus (a)

(c): "$\Longrightarrow$":

folgt direkt aus (b)

"$\Leftarrow$": Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$.

D.h. es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$ so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

Sei $\varphi \in FO[\sigma]$ beliebig.
Wir zeigen im Folgenden, dass auch die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ ableitbar ist
(— daraus folgt, dass für jedes $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$; gemäß (6) ist Φ daher widerspruchsvoll).

Wir wissen bereits, dass $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist. Eine Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{S}$ erhalten wir wie folgt:

1) $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$
2) $\exists v_0 \neg v_0 = v_0 \vdash \exists v_0 \neg v_0 = v_0$ ---- (V)
3) $\exists v_0 \neg v_0 = v_0 \vdash \neg \forall v_0\, v_0 = v_0$ ---- (QA), siehe Lemma 7.20
4) $\emptyset \vdash v_0 = v_0$ ---- (G)
5) $\emptyset \vdash \forall v_0\, v_0 = v_0$ ---- ($\forall$S) auf 4)
6) $\exists v_0 \neg v_0 = v_0 \vdash \forall v_0\, v_0 = v_0$ ---- (E) auf 5)
7) $\exists v_0 \neg v_0 = v_0 \vdash \varphi$ ---- (W) auf 3), 6)
8) $\Gamma, \exists v_0 \neg v_0 = v_0 \vdash \varphi$ ---- (E) auf 7)
9) $\Gamma \vdash \varphi$ ---- (KS) auf 1), 8)

$\square$

Lemma 7.26

Für alle $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und alle $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt:

(a) $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist widerspruchsvoll

(b) $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi \iff \Phi \cup \{\varphi\}$ ist widerspruchsvoll

(c) Φ widerspruchsfrei $\implies$ mindestens eine der beiden Mengen $\Phi \cup \{\varphi\}$ und $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist widerspruchsfrei.

Beweis:

(a) "$\Rightarrow$": Sei $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Man sieht leicht, dass dann auch gilt $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Außerdem gilt natürlich, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{S}} \neg\varphi$ (Regel (V) im Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$).

Somit ist $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsvoll.

"$\Leftarrow$": Sei $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsvoll.

Wegen Lemma 7.25 (b) gilt dann: $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

D.h. es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$ so dass die Sequenz $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

Eine Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathcal{S}$ erhalten wir dann wie folgt:

1) $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$

2) $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ (V)

3) $\Gamma \vdash \varphi$ (FU) auf 1), 2).

Somit gilt: $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.

$\square$ (a)

(b): analog zu (a).

(c): Sei Φ widerspruchsfrei.

Angenommen, sowohl $\Phi \cup \{\varphi\}$ als auch $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist widerspruchsvoll.

Aus (a) und (b) folgt dann, dass

$\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \neg\varphi$.

Somit ist Φ nicht widerspruchsfrei. ↯ Wid.

$\square$

Dies beendet die Auflistung der Eigenschaften von widerspruchsfreien bzw. widerspruchsvollen Formelmengen.

Das folgende — sehr einfache — Lemma wird später, beim Beweis des Vollständigkeitssatzes (und auch in Kapitel 8 beim Beweis des so genannten Endlichkeitssatzes) sehr nützlich sein.

<u>Lemma 7.27</u> (Das syntaktische Endlichkeitslemma)

Für jedes $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ gilt:

Φ ist widerspruchsfrei $\iff$ jede <u>endliche</u> Teilmenge $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist widerspruchsfrei

<u>Beweis</u>:

"<u>$\Longrightarrow$</u>": Angenommen, $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist widerspruchsvoll.

Lemma 7.25(c) liefert dann, dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$.

wegen $\Phi \supseteq \Gamma$ folgt, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$.

Lemma 7.25(c) liefert, dass Φ widerspruchsvoll ist $\lightning$

"<u>$\Longleftarrow$</u>": Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll.

Lemma 7.25(c) $\Rightarrow$ $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$. Gemäß Definition 7.14 gibt es daher ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$ so dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$

Lemma 7.25(c) $\Rightarrow$ Γ ist widerspruchsvoll. $\lightning$ $\square$

7.5 Der Vollständigkeitssatz

<u>Satz 7.28</u> (Der Vollständigkeitssatz; in 2 Varianten)

Für alle $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und alle $\varphi \in FO[\sigma]$ gilt:

(a) $$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff \Phi \models \varphi$$

(b) Φ ist widerspruchs<u>frei</u> $\iff$ Φ ist erfüllbar.

Wir beweisen den Vollständigkeitssatz hier nur für <u>abzählbare</u> Signaturen σ — er gilt aber für <u>alle</u> Signaturen σ (für einen Beweis siehe [EFT]).

Das folgende Lemma liefert den Schlüssel für den Beweis des Vollständigkeitssatzes.

<u>Lemma 7.29</u> (Erfüllbarkeitslemma)

Für jedes $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ gilt:

Φ widerspruchs<u>frei</u> $\implies$ Φ erfüllbar.

Bevor wir Lemma 7.29 beweisen, zeigen wir zunächst, wie es genutzt werden kann, um den Vollständigkeitssatz zu beweisen.

<u>Beweis von Satz 7.28:</u>

<u>(b)</u>: "$\Longrightarrow$": Dies ist gerade die Aussage des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 7.29)

"$\Longleftarrow$": Korollar 7.24

<u>(a)</u>: "$\Longrightarrow$": Korollar 7.16

"$\Longleftarrow$" Es gelte $\Phi \models \varphi$.

Angenommen, $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Aus Lemma 7.26 (a) folgt dann, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchs<u>frei</u> ist

Aus Teil <u>(b)</u> von Satz 7.28 folgt, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ erfüllbar ist.

D.h. es gibt eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi \cup \{\neg\varphi\}$. D.h. es gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$.

Laut Voraussetzung gilt aber: $\Phi \models \varphi$, und daher gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$. ↯ Widerspruch. $\square$

Der Rest von Kapitel 7 ist dem Beweis des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 7.29) gewidmet.

Dazu sei σ eine abzählbare Signatur, und Φ sei im Folgenden eine fest gewählte widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq FO[\sigma]$.