Im Folgenden geben wir einige Beispiele für Ableitungen im Sequenzenkalkül:

Beispiel 7.12

(a) F.a. $\varphi \in \mathrm{Fo}[\sigma]$ ist $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$ ableitbar in $\mathfrak{S}$:

1)	$\varphi \vdash \varphi$	(V)
2)	$\varphi \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$	$(\vee S_1)$ auf 1) angewendet
3)	$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$	(V)
4)	$\neg\varphi \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$	$(\vee S_2)$ auf 3) angewendet
5)	$\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$	(FU) auf 2), 4) angewendet

(b) F.a. $\varphi \in \mathrm{Fo}[\sigma]$ ist $\exists x \forall y\, \varphi \vdash \forall y \exists x\, \varphi$ ableitbar in $\mathfrak{S}$:

1)	$\varphi \vdash \varphi$	(V)
2)	$\varphi \vdash \exists x\, \varphi$	$(\exists S)$ auf 1) mit $t = x$
3)	$\forall y\, \varphi \vdash \exists x\, \varphi$	$(\forall A)$ auf 2) mit $t = y$
? 4)	$\forall y\, \varphi \vdash \forall y \exists x\, \varphi$	$(\forall S)$ auf 3) mit $x = y$
5)	$\exists x \forall y\, \varphi \vdash \forall y \exists x\, \varphi$	$(\exists A)$ auf 4) mit $y = x$

(c) $R(f(x)),\ \forall x\ x = f(x) \ \vdash\ R(f(f(x)))$

ist ableitbar in $\mathfrak{S}$:

1) $R(f(x)) \vdash R(f(x))$ (V)

2) $R(f(x)),\ x = f(x) \vdash R(f(f(x)))$

(S) mit $t = x$, $u = f(x)$

3) $R(f(x)),\ \forall x\ x = f(x) \vdash R(f(f(x)))$ $(\forall A)$.

Der folgende Satz bestätigt Punkt (I) der auf Seite 209 beschriebenen Agenda:

Satz 7.13 (Korrektheit des Sequenzenkalküls)

Jede in $\mathfrak{S}$ ableitbare Sequenz ist korrekt, d.h. f.a. Sequenzen $\Gamma \vdash \varphi$, die in $\mathfrak{S}$ ableitbar sind, gilt: $\Gamma \models \varphi$.

Beweis: Wir zeigen für alle Regeln von $\mathfrak{S}$: Wenn die Voraussetzungen korrekt sind, dann ist auch die Konsequenz korrekt.

Beachte: Satz 7.13 folgt dann per Induktion.

Induktionsanfang:

- (V): $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$

  Offensichtlich gilt: $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \varphi$.
  Daher ist die Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ korrekt.

- (G): $\dfrac{}{\Gamma \vdash t = t}$

  Offensichtlich ist die Formel $t = t$ allgemeingültig.
  Daher gilt f.a. Γ, dass $\Gamma \models t = t$.
  Somit ist die Sequenz $\Gamma \vdash t = t$ korrekt.

Induktionsschritt:

- (E): $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi}$ falls $\Gamma \subseteq \Gamma'$

  Ind.annahme: $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt, d.h. $\Gamma \models \varphi$.
  Sei $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Zu zeigen: $\Gamma' \models \varphi$.
  Beweis: Sei $\mathcal{I}$ eine zu Γ' und φ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma'$. Wegen $\Gamma \subseteq \Gamma'$ gilt dann auch: $\mathcal{I} \models \Gamma$. Wegen $\Gamma \models \varphi$ folgt, dass $\mathcal{I} \models \varphi$.
  Somit gilt: $\Gamma' \models \varphi$, d.h. $\Gamma' \vdash \varphi$ ist korrekt.

• (Fu):

$$\frac{\Gamma, \psi \vdash \varphi \qquad \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Ind.annahme: $\Gamma, \psi \vdash \varphi$ ist korrekt und $\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi$ ist korrekt.

zu zeigen: $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt.

Beweis: Laut Ind.annahme gilt $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$ und $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$.
Sei $\mathfrak{I}$ eine zu $\Gamma \cup \{\psi\} \cup \{\varphi\}$ passende σ-Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \Gamma$.
Fall 1: $\mathfrak{I} \models \psi$. Dann: $\mathfrak{I} \models \Gamma \cup \{\psi\}$.
Wegen $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$ gilt daher: $\mathfrak{I} \models \varphi$.
Fall 2: $\mathfrak{I} \models \neg\psi$. Dann: $\mathfrak{I} \models \Gamma \cup \{\neg\psi\}$.
Wegen $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$ gilt daher: $\mathfrak{I} \models \varphi$.
Somit gilt: $\Gamma \models \varphi$, d.h. die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt

• (W):

$$\frac{\Gamma \vdash \psi \qquad \Gamma \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad (\text{f.a. } \varphi \in \mathrm{FO}[\sigma])$$

Ind.annahme: $\Gamma \vdash \psi$ ist korrekt und $\Gamma \vdash \neg\psi$ ist korrekt

zu zeigen: f.a. $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ist $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt

Beweis: Wir zeigen, dass es keine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ geben kann, die Γ erfüllt. Daraus folgt dann unmittelbar, dass $\Gamma \models \varphi$, d.h. dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt ist.

Angenommen, $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ ist eine zu Γ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$.
Offensichtlicherweise kann der Definitionsbereich von β so erweitert werden, dass $\mathcal{I}$ auch zur Formel ψ passt.
Laut Ind.annahme gilt: $\Gamma \vdash \psi$ und $\Gamma \vdash \neg\psi$ sind korrekt, d.h. es gilt: $\Gamma \models \psi$ und $\Gamma \models \neg\psi$.
Wegen $\mathcal{I} \models \Gamma$ muss daher sowohl $\mathcal{I} \models \psi$ als auch $\mathcal{I} \models \neg\psi$ gelten $\lightning$ Wid.

- $(\wedge A_1)$: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi}$

  Ind.annahme: $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ ist korrekt.
  Zu zeigen: $\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi$ ist korrekt

  Beweis: offensichtlich.

- $(\wedge A_2)$: analog.

- $(\underline{\wedge S})$, $(\underline{\vee A})$, $(\underline{\vee S_1})$, $(\underline{\vee S_2})$, $(\underline{\forall A})$, $(\underline{\exists S})$, $(\underline{S})$ analog (einfach!)

- $(\underline{\forall S})$: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$, falls $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x \varphi)$

<u>Ind.annahme</u>: $\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}$ ist korrekt, d.h. $\Gamma \models \varphi\frac{y}{x}$

Sei $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x \varphi)$. <u>Zu zeige</u>: $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ ist korrekt.

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$.

Wegen $y \notin \text{frei}(\Gamma)$ gilt laut Koinzidenzlemma, dass f.a. $a \in A$ gilt: $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \Gamma$.

Gemäß Indannahme gilt: $\Gamma \models \varphi\frac{y}{x}$, d.h. es gilt f.a. $a \in A$, dass $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}$

Somit gilt: $\mathcal{I} \models \forall y\, \varphi\frac{y}{x}$

Wegen $y \notin \text{frei}(\forall x \varphi) = \text{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$ gilt gemäß Definition 2.6 ("Substitution"), dass $\mathcal{I} \models \forall x \varphi$.

Somit gilt: $\Gamma \models \forall x \varphi$, d.h. die Sequenz $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ ist korrekt.

• $(\exists A)$: $$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$$

analog; Details: Übung.

Dies schließt den Beweis von Satz 7.13 ab. □

Wir betrachten den Sequenzenkalkül $\mathcal{S}$ als "formales Beweissystem", mit dem man mechanisch den Nachweis erbringen kann, dass für eine Formelmenge Φ und eine Formel φ gilt: $\Phi \models \varphi$. Dies wird in der folgenden Definition präzisiert:

<u>Definition 7.14</u> (Beweisbarkeit)

Sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und sei $\varphi \in FO[\sigma]$.

Die Formel φ ist <u>beweisbar</u> aus Φ, wenn es eine endliche Teilmenge Γ von Φ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathcal{S}$ ableitbar ist.

Ein <u>Beweis</u> von φ aus Φ ist eine Ableitung einer Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathcal{S}$ für ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$.

Notation 7.15

- Wir schreiben $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$, um auszudrücken, dass φ aus Φ beweisbar ist.
- An Stelle von $\emptyset \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$ schreiben wir auch $\vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Aus Satz 7.13 (Korrektheit von $\mathfrak{S}$) folgt direkt:

Korollar 7.16

Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \implies \Phi \models \varphi$$

(d.h.: falls φ aus Φ beweisbar ist, so folgt φ aus Φ).

Unser Ziel im Rest von Kapitel 7 ist, zu zeigen, dass auch die Umkehrung von Korollar 7.14 gilt, d.h.: F.a. $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff \Phi \models \varphi.$$

Dies ist gerade die Aussage des Vollständigkeitssatzes. Man beachte, dass die Richtung "$\Leftarrow$" gerade Punkt (II) der auf Seite 209 beschriebenen Agenda darstellt.

7.3 Ableitbare Regeln im Sequenzenkalkül

Definition 7.17: Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k+1} \subseteq_e FO[\sigma]$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1} \in FO[\sigma]$.

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_k \vdash \varphi_k\end{array}}{\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}}$$

heißt ableitbar (in $\mathfrak{S}$), wenn $\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}$ aus der Menge $V := \{\Gamma_i \vdash \varphi_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

Lemma 7.18

Sei $\mathfrak{S}'$ eine Erweiterung des Sequenzenkalküls $\mathfrak{S}$ um eine oder mehrere ableitbare Sequenzenregeln.

Dann ist eine Sequent S genau dann in $\mathfrak{S}'$ ableitbar, wenn sie auch in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 8. $\square$

Im Folgenden wird eine Liste von ableitbaren Sequenzenregeln zusammengestellt, die für den Beweis des Vollständigkeitssatzes sehr nützlich sein werden.

<u>Lemma 7.19</u> (Ableitbare aussagenlogische Sequenzenregeln)

Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar (f.a. $\Gamma \subseteq_e FO[\sigma]$ und $\varphi, \psi \in FO[\sigma]$):

- Kettenschlussregel (KS):

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma, \varphi \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

- Disjunktiver Syllogismus (DS):

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \neg\varphi \\ \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

- Modus Ponens (MP):

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

- Kontrapositionsregeln (KP):

- $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\varphi}$$

- $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \neg\varphi}$$

- $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi}$$

- $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$$

Beweis:

- (KS):

1)	$\Gamma \vdash \varphi$	(Voraussetzung)
2)	$\Gamma, \varphi \vdash \psi$	(Voraussetzung)
3)	$\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$	(E) auf 1)
4)	$\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$	(V)
5)	$\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$	(W) auf 3), 4)
6)	$\Gamma \vdash \psi$	(FU) auf 2), 5)

- (DS): 1) $\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)$ (Voraussetzung)

  2) $\Gamma \vdash \neg\varphi$ (Voraussetzung)

  3) $\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi$ (E) auf 2)

  4) $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ (V)

  5) $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ (W) auf 3), 4)

  6) $\Gamma, \psi \vdash \psi$ (V)

  7) $\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \psi$ (vA) auf 5), 6)

  8) $\Gamma \vdash \psi$ (KS) auf 1), 7)

- (MP): 1) $\Gamma \vdash (\neg\varphi \vee \psi)$ (Voraussetzung; wir betrachten hier und im Folgende die Formel $(\varphi \to \psi)$ als Abkürzung für $(\neg\varphi \vee \psi)$)

  2) $\Gamma \vdash \varphi$ (Voraussetzung)

  3) $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$ (E) auf 2)

  4) $\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$ (V)

  5) $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$ (W) auf 3), 4)

  6) $\Gamma, \psi \vdash \psi$ (V)

  7) $\Gamma, (\neg\varphi \vee \psi) \vdash \psi$ (vA) auf 5), 6)

  8) $\Gamma \vdash \psi$ (KS) auf 1), 7)

- (KP):

1)	Γ, φ	$\vdash \psi$	(Voraussetzung)
2)	$\Gamma, \neg\psi, \varphi$	$\vdash \psi$	(E) auf 1)
3)	$\Gamma, \neg\psi$	$\vdash \neg\psi$	(V)
4)	$\Gamma, \neg\psi, \varphi$	$\vdash \neg\psi$	(E) auf 3)
5)	$\Gamma, \neg\psi, \varphi$	$\vdash \neg\varphi$	(W) auf 2), 4)
6)	$\Gamma, \neg\psi, \neg\varphi$	$\vdash \neg\varphi$	(V)
7)	$\Gamma, \neg\psi$	$\vdash \neg\varphi$	(FU) auf 5), 6)

Die anderen Kontrapositionsregeln können analog abgeleitet werden. □

Lemma 7.20 (Ableitbare Quantorenregeln)

Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar
(f.a. $\Gamma \subseteq_e FO[\sigma]$, alle $\varphi \in FO[\sigma]$ und alle $x \in Var$)

Quantorenaustauschregeln (QA):

1) $$\frac{\Gamma \vdash \neg\forall x\, \varphi}{\Gamma \vdash \exists x\, \neg\varphi}$$

2) $$\frac{\Gamma \vdash \exists x\, \neg\varphi}{\Gamma \vdash \neg\forall x\, \varphi}$$

3) $$\frac{\Gamma \vdash \neg\exists x\, \varphi}{\Gamma \vdash \forall x\, \neg\varphi}$$

4) $$\frac{\Gamma \vdash \forall x\, \neg\varphi}{\Gamma \vdash \neg\exists x\, \varphi}$$