zunächst den $FO[\sigma]$-Satz φ_M konstruieren und dann auf endliche Erfüllbarkeit testen. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass das Halteproblem H_ε unentscheidbar ist.

$\square$ Satz 6.12

Anwendungen des Satzes von Trakhtenbrot:

Unter Verwendung des Satzes von Trakhtenbrot kann man die Unentscheidbarkeit vieler konkreter Logikprobleme beweisen. Im Folgenden wird dies exemplarisch an der Eigenschaft der Ordnungsinvarianz von Formeln dargelegt.

Definition 6.13

Sei σ eine Signatur und sei $\leq$ ein 2-stelliges Relationssymbol, das nicht zu σ gehört.

Ein $FO[\sigma \cup \{\leq\}]$-Satz φ heißt ordnungsinvariant auf FIN, falls für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle linearen Ordnungen $\leq_1^{\mathfrak{A}}$ und $\leq_2^{\mathfrak{A}}$ auf A gilt:

$$(\mathfrak{A}, \leq_1^{\mathfrak{A}}) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \leq_2^{\mathfrak{A}}) \models \varphi .$$

Mit Hilfe des Satzes von Trakhtenbrot kann man leicht einen Beweis für den folgenden Satz finden:

Satz 6.14

Für jede Signatur σ, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol E und mindestens ein 1-stelliges Relationssymbol P enthält, ist das folgende Problem unentscheidbar:

Ordnungsinvarianz auf FIN_σ

Eingabe: Ein $\mathrm{FO}[\sigma \cup \{\leq\}]$-Satz φ

Frage: Ist φ ordnungsinvariant auf FIN ?

Beweis: Angenommen, das Problem wäre doch entscheidbar, durch einen geeigneten Algorithmus $\mathbb{A}$, der bei Eingabe eines beliebigen $\mathrm{FO}[\sigma \cup \{\leq\}]$-Satzes φ entscheidet, ob φ ordnungsinvariant auf FIN ist.

Wir nutzen $\mathbb{A}$, um einen neuen Algorithmus $\mathbb{A}'$ zu konstruieren, der das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathrm{FO}[\{E\}]$ auf FIN löst — und den es gemäß des Satzes von Trakhtenbrot nicht geben kann.

Bei Eingabe eines $FO[\{E\}]$-Satzes ψ tut $\mathcal{A}'$ folgendes:

1) Sei $\chi := \exists x \forall y \, (P(x) \wedge x \leq y)$

2) Sei $\varphi := (\psi \rightarrow \chi)$

3) Rufe $\mathcal{A}$ bei Eingabe φ auf

4) Falls $\mathcal{A}$ "ja" ausgibt, so gib aus "ψ hat kein endliches Modell";
falls $\mathcal{A}$ "nein" ausgibt, so gib aus "ψ hat ein endliches Modell".

__Klar:__ $\mathcal{A}'$ hält stets nach endlich vielen Schritten.

Außerdem gilt: Die Formel χ ist __nicht__ ordnungsinvariant, da für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und jede lineare Ordnung $\leq^{\mathfrak{A}}$ auf $\mathfrak{A}$ gilt:

$(\mathfrak{A}, \leq^{\mathfrak{A}}) \models \chi \iff$ das minimale Element bzgl der linearen Ordnung $\leq^{\mathfrak{A}}$ liegt in $P^{\mathfrak{A}}$.

Daher gilt für die Formel $\varphi := (\psi \rightarrow \chi)$ folgendes:

ψ hat ein endliches Modell $(A, E^{\mathfrak{A}})$ $\iff$ φ ist __nicht__ ordnungsinvariant auf FIN.

Somit ist $\mathcal{A}'$ ein Algorithmus, der das Erfüllbarkeitsproblem für $FO[\{E\}]$ auf FIN löst. ↯ Widerspruch zum Satz von Trakhtenbrot $\square$

In Kapitel 7 werden wir ein korrektes und vollständiges Beweissystem für die Logik erster Stufe kennenlernen. Insbesondere folgt daraus, dass für jede Signatur σ das Problem

<u>Allgemeingültigkeit</u>

<u>Eingabe</u>: Ein $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz φ

<u>Frage</u>: Ist φ allgemeingültig?
(vgl. Definition 1.27)

semi-entscheidbar ist.

Als einfache Folgerung aus dem Satz von Trakhtenbrot erhält man, dass die Einschränkung des Allgemeingültigkeitsproblems auf die Klasse aller <u>endlichen</u> Strukturen weder entscheidbar noch semi-entscheidbar ist:

<u>Satz 6.15</u>:

Für jede Signatur σ, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält, ist das folgende Problem nicht semi-entscheidbar:

<u>Allgemeingültigkeit auf FIN</u>:

<u>Eingabe</u>: Ein $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz φ

<u>Frage</u>: Gilt für alle <u>endlichen</u> σ-Strukturen $\mathcal{A}$, dass $\mathcal{A} \models \varphi$?

<u>Beweis</u>: Übung.

Kapitel 7: Der Vollständigkeitssatz

Ziel dieses Kapitels ist, ein "formales Beweissystem" (den sogenannten Sequenzenkalkül) kennenzulernen, mit dem man alle allgemeingültigen FO-Formeln herleiten kann. — Insbesondere folgt daraus dann, dass das auf Seite 201 definierte Problem Allgemeingültigkeit semi-entscheidbar ist.

7.1 Beweiskalküle

Definition 7.1 (Ableitungsregel; Kalkül)

Sei M eine beliebige Menge.

(a) Eine Ableitungsregel über M hat die Form

$$\frac{\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array}}{b}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n, b \in M$.

Wir bezeichnen $a_1, \ldots, a_n$ als __die Voraussetzungen__ der Regel $\frac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$ und b als __die Konsequenz__.

Ableitungsregeln ohne Voraussetzungen (also mit $n=0$) bezeichnen wir als __Axiome__.

__(b)__ Ein __Kalkül__ über M ist eine Menge von Ableitungsregeln über M

__Definition 7.2__ (Ableitbare Elemente)

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül über einer Menge M.

__(a)__ Die Menge $A_{\mathcal{K}} \subseteq M$ aller __in $\mathcal{K}$ ableitbaren Elemente__ ist rekursiv wie folgt definiert:

__(1)__ Für alle Axiome $\frac{}{b}$ in $\mathcal{K}$ ist $b \in A_{\mathcal{K}}$

__(2)__ Für alle Ableitungsregeln $\frac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$ in $\mathcal{K}$ gilt: Wenn $a_1, \ldots, a_n \in A_{\mathcal{K}}$, so auch $b \in A_{\mathcal{K}}$.

($A_{\mathcal{K}}$ ist also die bezüglich "$\subseteq$" kleinste Menge, die die Abschlusseigenschaften __(1)__ und __(2)__ besitzt.)

(b) Sei $V \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge von M.

Die Menge $A_{\mathcal{K},V} \subseteq M$ aller

aus V in $\mathcal{K}$ ableitbaren Elemente ist rekursiv

wie folgt definiert:

(0) F.a. $b \in V$ ist $b \in A_{\mathcal{K},V}$

(1) F.a. Axiome $\frac{}{b}$ in $\mathcal{K}$ ist $b \in A_{\mathcal{K},V}$

(2) F.a. Ableitungsregeln $\dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$ in $\mathcal{K}$ gilt:

Wenn $a_1, \ldots, a_n \in A_{\mathcal{K},V}$, so auch $b \in A_{\mathcal{K},V}$.

(V heißt Menge von Voraussetzungen.)

Beachte: Kalküle sind also einfach eine andere Schreibweise für rekursive Definitionen.

Definition 7.3 (Ableitungen)

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül über einer Menge M, sei $V \subseteq M$ und sei $a \in M$.

(a) Eine Ableitung von a aus V in $\mathcal{K}$ ist eine endliche Folge $(a_1, \ldots, a_\ell) \in M^\ell$, so dass

$\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $a_\ell = a$ und für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$ gilt:

- $a_i \in V$ oder
- $\overline{a_i}$ ist ein Axiom in $\mathcal{K}$ oder
- es gibt in $\mathcal{K}$ eine Ableitungsregel $\dfrac{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}}{a_i}$, so dass $b_1, \dots, b_n \in \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$.

(b) Eine <u>Ableitung von a in $\mathcal{K}$</u> ist eine Ableitung von a aus $\emptyset$ in $\mathcal{K}$.

<u>Beobachtung 7.4:</u> Offensichtlich gilt:

a ist aus V in $\mathcal{K}$ ableitbar (gemäß Def. 7.2) $\iff$ es gibt eine Ableitung von a aus V in $\mathcal{K}$ (gemäß Def. 7.3).

7.2 Ein Sequenzenkalkül

In diesem Kapitel sei σ eine beliebige, fest gewählte Signatur (im Sinne von Def. 1.1).

Notation 7.5

- $t, u, t_1, t_2, t', u', u'', \dots$ bezeichnen immer σ-Terme
- $\varphi, \psi, \chi, \dots$ bezeichnen immer $FO[\sigma]$-Formeln
- $\Phi, \Psi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi', \dots$ bezeichnen Mengen von $FO[\sigma]$-Formeln
- $\Gamma, \Delta, \Gamma', \Delta_1, \Delta_2, \dots$ bezeichnen <u>endliche</u> Mengen von $FO[\sigma]$-Formeln
- Für $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ ist
$$\text{frei}(\Phi) := \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{frei}(\varphi)$$
Manchmal schreiben wir auch $\text{frei}(\Phi, \varphi)$ an Stelle von $\text{frei}(\Phi \cup \{\varphi\})$
- Ist M eine Menge, so schreiben wir $L \subseteq_e M$, um auszudrücken, dass L eine <u>endliche</u> Teilmenge von M ist.

Definition 7.6 (Sequenzen)

(a) Eine Sequenz ist ein Ausdruck der Form

$$\Gamma \vdash \psi$$

wobei $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Wir bezeichnen Γ als das Antezedenz und ψ als das Sukzedenz der Sequenz $\Gamma \vdash \psi$.

(b) Wir schreiben M_S, um die Menge aller Sequenzen zu bezeichnen, d.h.:

$$M_S := \{ \Gamma \vdash \psi \ : \ \Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma] \text{ und } \psi \in \mathrm{FO}[\sigma] \}$$

Notation 7.7:

- Statt $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ schreiben wir auch $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
- Statt $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \psi$ schreiben wir auch $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$
- Statt $\emptyset \vdash \psi$ schreiben wir auch $\vdash \psi$.

In Definition 2.1 hatten wir bereits festgelegt, wann eine FO(σ)-Formel ψ aus einer Formel φ folgt:

$\varphi \models \psi \quad \underset{\text{Def 2.1}}{:\Longleftrightarrow}$ f.a. zu φ und ψ passenden σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt: Falls $\mathcal{I} \models \varphi$, so auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Die folgende Definition legt (auf die naheliegende Weise) fest, wann eine Formel ψ aus einer ganzen Menge Φ von Formeln folgt:

<u>Definition 7.8:</u>

Sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und sei $\psi \in FO[\sigma]$.

ψ folgt aus Φ (bzw. Φ impliziert ψ), kurz: $\Phi \models \psi$, wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$, die zu ψ und zu allen $\varphi \in \Phi$ passen, gilt: falls f.a. $\varphi \in \Phi$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$, so gilt auch: $\mathcal{I} \models \psi$.

Notation 7.9

Sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und sei $\mathcal{I}$ eine σ-Interpretation.

- Wir sagen: $\mathcal{I}$ passt zu Φ, falls $\mathcal{I}$ zu jedem $\varphi \in \Phi$ passt.
- $\mathcal{I} \models \Phi$ (in Worten: $\mathcal{I}$ erfüllt Φ) $:\Longleftrightarrow$ f.a. $\varphi \in \Phi$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$.

Definition 7.10 (korrekte Sequenzen)

Eine Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ heißt korrekt, wenn gilt: $\Gamma \models \varphi$.

Die folgende Definition führt einen Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen fest, den so genannten Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$. Im Verlauf von Kapitel 7 werden wir sehen, dass folgendes gilt:

(I) Alle in $\mathfrak{S}$ ableitbaren Sequenzen sind korrekt.

(II) Ist $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und ist $\psi \in FO[\sigma]$ so dass $\Phi \models \psi$, dann gibt es ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ in $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.

Definition 7.11 (Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$)

Der Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist der Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen, der aus den folgenden Ableitungsregeln besteht

(f.a. $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, $t, u \in T_\sigma$, $x, y \in \mathrm{Var}$):

"Grundregeln"

- Voraussetzungsregel (V):

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

- Erweiterungsregel (E):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi} \quad \text{falls } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

"Aussagenlogische Regeln"

- Fallunterscheidungsregel (FU)

$$\frac{\begin{matrix} \Gamma, \psi \vdash \varphi \\ \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi \end{matrix}}{\Gamma \vdash \varphi}$$

- Widerspruchsregel (W)

$$\frac{\begin{matrix} \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \neg\psi \end{matrix}}{\Gamma \vdash \varphi} \quad (\text{f.a. } \varphi \in \mathrm{FO}[\sigma])$$

- $\wedge$-Einführung im Antezedenz $(\wedge A_1)$, $(\wedge A_2)$:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\psi \wedge \varphi) \vdash \chi}$$

- $\wedge$-Einführung im Sukzedenz $(\wedge S)$:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

- $\vee$-Einführung im Antezedenz $(\vee A)$:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, \varphi \vdash \chi \\ \Gamma, \psi \vdash \chi\end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \chi}$$

- $\vee$-Einführung im Sukzedenz $(\vee S_1)$, $(\vee S_2)$:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\psi \vee \varphi)}$$

„weitere Aussagen-logische Regeln"

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

- $\forall$-Einführung im Antezedent ($\forall A$):

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \psi}$$

- $\forall$-Einführung im Sukzedent ($\forall S$):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$, falls $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x \varphi)$

- $\exists$-Einführung im Antezedent ($\exists A$)

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi}$$, falls $y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x \varphi, \psi)$

- $\exists$-Einführung im Sukzedent ($\exists S$)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$$

"Quantoren-regeln"

- Reflexivität der Gleichheit (G):

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}$$

- Substitutionsregel (S):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, t = u \vdash \varphi\frac{u}{x}}$$

"Gleichheits-regeln"