Ein alternativer Beweis, der nicht per Induktion nach dem Formelaufbau, sondern durch Verwendung von EF-Spielen bzw Hin- und Her-Systemen vorgeht, wird in Gaifmans Originalarbeit skizziert und im Buch von Ebbinghaus und Flum ausführlich dargestellt. Dieser "modelltheoretische" Beweis liefert allerdings nicht unmittelbar einen Algorithmus, der bei Eingabe einer Formel eine äquivalente Formel in GNF berechnet.

Im Folgenden werden 2 Anwendungsbereiche des Satzes von Gaifman vorgestellt.

(1) Nicht-Ausdrückbarkeits-Resultate:

Der Satz von Gaifman liefert ein Werkzeug, um zu zeigen, dass bestimmte Eigenschaften und Anfragen nicht in der Logik erster Stufe formalisiert werden können: die Gaifman-Lokalität der Logik erster Stufe. (Details: in Kapitel 4.2)

(2) Algorithmische Meta-Theoreme:

Die Transformation in Gaifman-Normalform kann oft als erster Schritt verwendet werden, um effiziente Algorithmen für Berechnungsprobleme, die durch FO-Formeln gegeben sind, zu entwickeln (Details: in Kapitel 4.3).

4.2 Die Gaifman-Lokalität der Logik erster Stufe

Definition 4.12: (Anfragen)

Sei σ eine Signatur und sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(a) Eine k-stellige Anfrage ist eine Abbildung q, die jeder σ-Struktur $\mathfrak{A}$ eine k-stellige Relation $q(\mathfrak{A}) \subseteq A^k$ zuordnet.

(b) Sei S eine Klasse von σ-Strukturen. Eine k-stellige Anfrage q heißt FO-definierbar auf S, falls es eine FO[σ]-Formel $\varphi(\vec{x})$ mit freien Variablen $\vec{x} = x_1, \dots, x_k$ gibt, so dass für alle $\mathfrak{A} \in S$ gilt:

$$q(\mathfrak{A}) = \{ \vec{a} \in A^k : \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \}.$$

Beispiel 4.13

Sei $\sigma := \{ \underset{2}{E} \}$.

Die 1-stellige Anfrage Isolierte-Punkte, die jedem Graphen $G = (V, E)$ die Menge

$$\text{Isolierte-Punkte}(G) := \left\{ v \in V : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G \\ \text{keine Kante} \\ \text{von oder zu } v \end{array} \right\}$$

ist FO-definierbar (auf der Klasse aller Graphen) durch die Formel

$$\varphi(x) := \neg \exists y \, (Exy \vee Eyx) .$$

In Definition 3.29 haben wir bereits den Begriff der Hanf-Lokalität (als Eigenschaft von Strukturklassen) kennengelernt. Ein etwas anderer Lokalitätsbegriff, der sich nicht auf Strukturklassen, sondern auf Anfragen bezieht, ist die folgendermaßen definierte Gaifman-Lokalität:

Definition 4.14 (Gaifman-Lokalität)

Sei σ eine relationale Signatur, sei S eine Klasse von σ-Strukturen, und sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Eine k-stellige Anfrage q heißt **Gaifman-lokal auf S**, falls es Zahlen $r, m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $\mathfrak{A} \in S$ und alle $\vec{a} \in A^k$ und alle $\vec{b} \in A^k$ gilt:

Falls $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \equiv_m \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{b})$, so

$$\vec{a} \in q(\mathfrak{A}) \iff \vec{b} \in q(\mathfrak{A}).$$

Aus dem Satz von Gaifman folgt unmittelbar, dass die Logik erster Stufe nur Gaifman-lokale Anfragen definieren kann:

Satz 4.15 (Gaifman-Lokalität der Logik erster Stufe)

Für jede endliche relationale Signatur σ und jede Klasse S von σ-Strukturen gilt:

Alle Anfragen, die FO-definierbar auf S sind, sind Gaifman-lokal auf S.

Beweis:

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, sei $\vec{x} = x_1, \ldots, x_k$, sei $\varphi(\vec{x})$ eine $FO[\sigma]$-Formel und sei q die von $\varphi(\vec{x})$ auf S definierte k-stellige Anfrage.

Gemäß dem Satz von Gaifman ist $\varphi(\vec{x})$ äquivalent zu einer Formel $\varphi'(\vec{x})$ in GNF.
D.h. $\varphi'(\vec{x})$ ist eine Boolesche Kombination von basis-lokalen Sätzen $\chi_1, \ldots, \chi_s$ und lokalen Formeln $\psi_1(\vec{x}), \ldots, \psi_t(\vec{x})$, für geeignete $s, t \in \mathbb{N}$.

Seien $r, m \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass jede der Formeln $\psi_i(\vec{x})$ r-lokal um $\vec{x}$ ist und eine Quantorentiefe $\leq m$ hat.

Betrachte nun eine beliebige Struktur $\mathfrak{A} \in S$

und beliebige Tupel $\vec{a} \in A^k$ und $\vec{b} \in A^k$,

so dass $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \equiv_m \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{b})$.

Wir müssen zeigen, dass

$$\mathfrak{A} \models \varphi'[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi'[\vec{b}].$$

Da φ' eine Boolesche Kombination der Formeln

$\chi_1, \dots, \chi_s, \psi_1(\vec{x}), \dots, \psi_t(\vec{x})$ ist, genügt

es, folgendes zu zeigen:

(1) f.a. $i \in \{1, \dots, s\}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \chi_i[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \chi_i[\vec{b}]$

und

(2) f.a. $i \in \{1, \dots, t\}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi_i[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \psi_i[\vec{b}]$

Punkt (1) gilt, da χ_i ein Satz ist und daher

nicht von $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ abhängt.

Punkt (2) gilt, da $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \equiv_m \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{b})$ ist,

der Quantorenrang von $\psi_i(\vec{x})$ kleiner oder

gleich m ist und $\psi_i(\vec{x})$ r-lokal um $\vec{x}$ ist.

$\square$