Die obige Definition 4.3 von lokalen Formeln spricht nur über Formeln, die freie Variablen besitzen. Als nächstes führen wir auch einen Lokalitäts-Begriff für Sätze ein, d.h. für Formeln, die keine freien Variablen besitzen.

Definition 4.7 (basis-lokale Sätze)

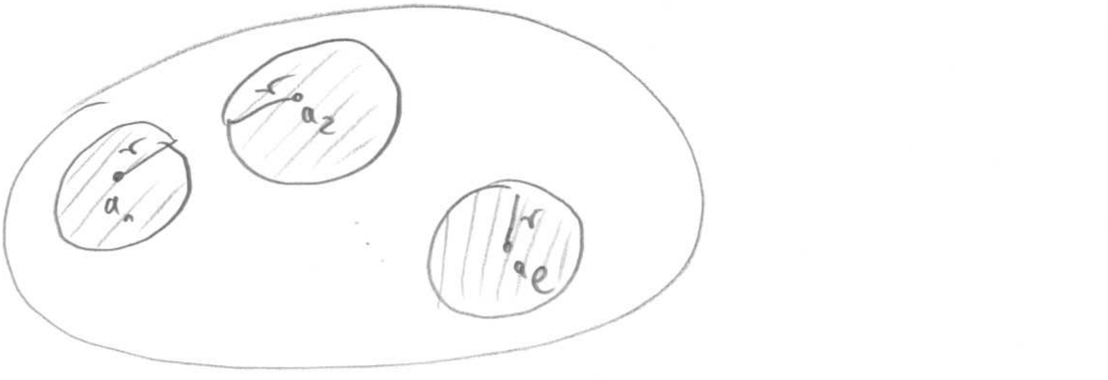
Sei σ eine endliche relationale Signatur und seien $\ell, r \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq 1$.

Ein $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz χ heißt basis-lokal (mit Parametern ℓ, r), falls χ von der Form

$$\exists x_1 \cdots \exists x_\ell \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq \ell} \mathrm{dist}(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{\ell} \psi(x_i) \right) \right)$$

ist, wobei $\psi(x)$ eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel ist, die r-lokal um x ist.

Skizze: $\mathfrak{A}$



Ein basis-lokaler Satz χ besagt also, dass es mindestens ℓ Elemente $x_1, \dots, x_\ell$ gibt, deren r-Nachbarschaften paarweise disjunkt sind und allesamt die Formel ψ erfüllen.

<u>Definition 4.8</u>

Sei M eine Menge von Formeln.
Die Menge <u>$BC(M)$</u> aller <u>Booleschen Kombinationen</u> von Formeln aus M ist rekursiv wie folgt definiert:

- für jedes $\varphi \in M$ gilt: $\varphi \in BC(M)$
- für jedes $\varphi \in BC(M)$ gilt: $\neg\varphi \in BC(M)$
- für jedes $\varphi \in BC(M)$ und $\psi \in BC(M)$ und für alle $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ gilt: $(\varphi * \psi) \in BC(M)$.

Definition 4.9 (Gaifman-Normalform)

Sei σ eine endliche relationale Signatur

(a) Ein $FO[\sigma]$-Satz φ ist in Gaifman-Normalform (kurz: GNF), falls φ eine Boolesche Kombination von basis-lokalen $FO[\sigma]$-Sätzen ist.

(b) Eine $FO[\sigma]$-Formel $\varphi(\vec{x})$ mit $\emptyset \neq frei(\varphi) = \{\vec{x}\}$ ist in Gaifman-Normalform (kurz: GNF), falls $\varphi(\vec{x})$ eine Boolesche Kombination von basis-lokalen $FO[\sigma]$-Sätzen ist und von Formeln, die lokal um $\vec{x}$ sind.

Beispiel 4.10

Sei $\sigma := \{\underset{2}{E}, \underset{1}{R}, \underset{1}{B}\}$.

Der $FO[\sigma]$-Satz

$$\varphi := \exists y \exists z \left(\neg Eyz \wedge Ry \wedge Bz \right)$$

ist nicht in GNF.

Der FO[σ]-Satz

$$\tilde{\varphi} :=$$

$$\underbrace{\exists x \; \Big(\overbrace{\exists y \exists z \big(dist(y,x) \leq 2 \wedge dist(z,x) \leq 2 \wedge \neg Eyz \wedge Ry \wedge Bz \big)}^{\text{2-lokal um } x} \Big)}_{\text{basis-lokaler Satz}}$$

$$\vee$$

$$\Big(\underbrace{\exists x_1 \exists x_2 \big(dist(x_1,x_2) > 2 \wedge (Rx_1 \vee Bx_1) \wedge (Rx_2 \vee Bx_2) \big)}_{\text{basis-lokaler Satz}}$$

$$\wedge$$

$$\underbrace{\exists x\, Rx}_{} \wedge \underbrace{\exists x\, Bx}_{} \Big)$$

basis-lokale Sätze

ist in GNF.

Außerdem gilt: $\tilde{\varphi}$ ist äquivalent zu φ.

Wir können nun den Satz von Gaifman angeben und beweisen:

Satz 4.11 (Satz von Gaifman, 1981)

Sei σ eine endliche relationale Signatur.
Jede FO[σ]-Formel ist äquivalent zu einer FO[σ]-Formel in Gaifman-Normalform.

Außerdem gibt es einen Algorithmus, der bei Eingabe einer FO[σ]-Formel φ eine zu φ äquivalente FO[σ]-Formel $\hat{\varphi}$ in Gaifman-Normalform berechnet.

Beweis: Wir geben hier den Originalbeweis von Gaifman an, der per Induktion über den Aufbau von FO[σ]-Formeln vorgeht.

Induktionsanfang:
φ ist eine atomare FO[σ]-Formel, d.h.
φ ist von der Form $x_1 = x_2$ (mit $x_1, x_2 \in Var$)
oder von der Form $R x_1 \cdots x_k$ (mit $R \in \sigma$, $k = ar(R)$, $x_1, \ldots, x_k \in Var$).
Offensichtlich ist φ dann 0-lokal um x_1, x_2 bzw um $x_1, \ldots, x_k$, und daher ist φ insbesondere in GNF.

Induktionsschritt:

Fall 1: φ ist von der Form $\neg\varphi'$.

Gemäß Induktionsannahme ist φ' äquivalent zu einer Formel $\tilde{\varphi}'$ in GNF.
Offensichtlich ist dann $\neg\tilde{\varphi}'$ eine zu φ äquivalente Formel in GNF.

Fall 2: φ ist von der Form $(\varphi_1 * \varphi_2)$ für ein $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$:

Analog zu Fall 1.

Fall 3: φ ist von der Form $\forall y\, \varphi'$

Dann ist φ äquivalent zur Formel $\neg\exists y \neg\varphi'$.
Daher kann Fall 3 durch eine Kombination von Fall 1 und dem folgenden Fall 4 gelöst werden.

Fall 4: φ ist von der Form $\exists y\, \varphi'$.

Gemäß Induktionsannahme ist φ' äquivalent zu einer Formel $\tilde{\varphi}'$ in GNF.
Gemäß Definition 4.9 ist $\tilde{\varphi}'$ eine Boolesche Kombination von basis-lokalen Sätzen und von

Formeln, die lokal um $\vec{x}, y$ sind, wobei $\vec{x}, y$ die freien Variablen von φ' bezeichnen.

OBdA (Details dazu: Übung) ist diese Boolesche Kombination in __disjunktiver Normalform__, so dass $\tilde{\varphi}'$ von der Form

$$\bigvee_{i \in I} \left(\chi_i \wedge \psi_i(\vec{x}, y) \right)$$

ist, wobei I eine geeignete endliche Indexmenge ist und, für jedes $i \in I$, χ_i eine Boolesche Kombination von basis-lokalen Sätzen ist, und $\psi_i(\vec{x}, y)$ eine lokale Formel um $\vec{x}, y$ ist (beachte dazu: Boolesche Kombinationen von lokalen Formeln sind selbst wieder lokal).

Insbesondere gilt für die Formel $\varphi \stackrel{\text{Def}}{=} \exists y\, \varphi'$, dass

$$\begin{aligned}
& \varphi \\
\equiv\ & \exists y \bigvee_{i \in I} \left(\chi_i \wedge \psi_i(\vec{x}, y) \right) \\
\equiv\ & \bigvee_{i \in I} \exists y \left(\chi_i \wedge \psi_i(\vec{x}, y) \right) \\
\equiv\ & \bigvee_{i \in I} \left(\chi_i \wedge \exists y\, \psi_i(\vec{x}, y) \right)
\end{aligned}$$

(die letzte Äquivalenz gilt, da χ_i ein <u>Satz</u> ist und daher insbes. $y \notin frei(\chi_i)$ ist).

Zum Abschluss von Fall 4 genügt es daher, im Folgenden zu zeigen, dass für jedes $i \in I$ die Formel $\exists y\, \psi_i(\vec{x}, y)$ äquivalent zu einer Formel in GNF ist. Sei also $i \in I$ beliebig.
Wir schreiben im Folgenden kurz $\psi(\vec{x}, y)$, um die Formel $\psi_i(\vec{x}, y)$ zu bezeichnen.

Wir wissen bereits, dass $\psi(\vec{x}, y)$ lokal um $\vec{x}, y$ ist, d.h. es gibt eine Zahl $r \in \mathbb{N}$, so dass $\psi(\vec{x}, y)$ r-lokal um $\vec{x}, y$ ist.

Falls $\vec{x}$ das <u>leere</u> Tupel ist, so ist $\psi(\vec{x}, y)$ einfach die Formel $\psi(y)$, die r-lokal um y ist.
Gemäß Definition 4.7 ist die Formel $\exists y\, \psi(y)$ daher ein basis-lokaler Satz und damit insbes. in GNF.

Falls $\vec{x}$ ein <u>nicht-leeres</u> Tupel ist, so gilt offensichtlicherweise:

$$\exists y\, \psi(\vec{x},y)$$

$$\equiv \underbrace{\exists y \big(dist(y,\vec{x}) \leq 2r+1 \wedge \psi(\vec{x},y)\big)}_{=:\, \vartheta_1(\vec{x})}$$

$$\vee \underbrace{\exists y \big(dist(y,\vec{x}) > 2r+1 \wedge \psi(\vec{x},y)\big)}_{=:\, \vartheta_2(\vec{x})}$$

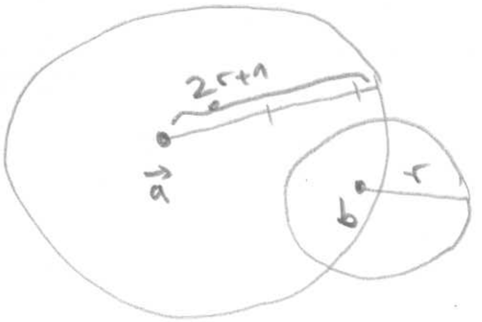
Zum Abschluss von Fall 4 genügt es daher, im Folgenden zu zeigen, dass jede der beiden Formeln $\vartheta_1(\vec{x})$ und $\vartheta_2(\vec{x})$ äquivalent zu einer Formel in GNF ist.

Wir betrachten zunächst die Formel $\vartheta_1(\vec{x})$ und stellen fest, dass sie lokal um $\vec{x}$ ist:
Sei dazu $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Struktur und sei $\vec{a} \in A$ eine Belegung für $\vec{x}$. Da $\psi(\vec{x},y)$ r-lokal um $\vec{x},y$ ist, wissen wir, dass folgendes gilt:

$$\mathfrak{A} \models \vartheta_1[\vec{a}] \iff \text{es gibt ein } b \in N_{2r+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \text{ so dass } \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a},b) \models \psi[\vec{a},b].$$

Ferner wissen wir, dass $N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a},b) = N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \cup N_r^{\mathfrak{A}}(b)$.
Für $b \in N_{2r+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ ist außerdem $N_r^{\mathfrak{A}}(b) \subseteq N_{3r+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$.

Skizze:



Daher: $N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}, b) \subseteq N_{3r+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$

Daraus folgt unmittelbar, dass die Formel $\vartheta_1(\vec{x})$ $(3r+1)$-lokal um $\vec{x}$ ist.

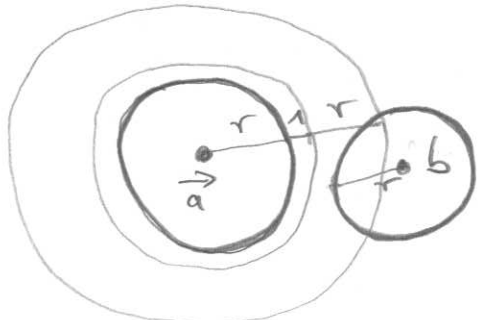
Insbes. ist $\vartheta_1(\vec{x})$ also in GNF.

Wir betrachten nun die Formel $\vartheta_2(\vec{x})$:

Sei dazu wieder $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Struktur und sei $\vec{a} \in A$ eine Belegung für $\vec{x}$.

Für jedes $b \in A$ mit $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(b, \vec{a}) > 2r+1$ gilt insbes.:

$N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \cap N_r^{\mathfrak{A}}(b) = \emptyset$



und für alle

$u \in N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ und $v \in N_r^{\mathfrak{A}}(b)$

ist $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(u, v) > 1$.

Daher ist die Struktur $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}, b)$ die disjunkte Vereinigung der Strukturen $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ und $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(b)$,

kurz: $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}, b) = \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \sqcup \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(b)$.

Da $\psi(\vec{x}, y)$ r-lokal um $\vec{x}, y$ ist, hängt die Gültigkeit von $\psi[\vec{a}, b]$ in $\mathfrak{A}$ nur von $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \sqcup \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(b)$ ab.

Eingeschränkt auf σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit Belegungen $\vec{a}$ und b so dass $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(b, \vec{a}) > 2r+1$ ist, ist daher die Formel $\psi(\vec{x}, y)$ äquivalent zu einer Booleschen Kombination von

(i) Formeln, die r-lokal um $\vec{x}$ sind, und

(ii) Formeln, die r-lokal um y sind

(detaillierte Begründung: Übung!).

O.B.d.A. ist diese Boolesche Kombination in disjunktiver Normalform, so dass $\vartheta_2(\vec{x})$ äquivalent ist zu einer Formel der Form

$$(*)_1 \quad \exists y \Big(\mathrm{dist}(y, \vec{x}) > 2r+1 \wedge \bigvee_{j \in J} \big(\gamma_j(\vec{x}) \wedge \delta_j(y) \big) \Big),$$

wobei J eine geeignete endliche Indexmenge ist und, für jedes $j \in J$, $\gamma_j(\vec{x})$ eine r-lokale Formel um $\vec{x}$ und $\delta_j(y)$ eine r-lokale Formel um y ist.

Offensichtlich ist die Formel aus $\circledast_1$ äquivalent zu

$$\circledast_2 \quad \bigvee_{j \in J} \exists y \left(dist(y,\vec{x}) > 2r+1 \land \gamma_j(\vec{x}) \land \delta_j(y) \right).$$

Da die Variable y nicht frei in $\gamma_j(\vec{x})$ vorkommt, ist die Formel aus $\circledast_2$ wiederum äquivalent zu

$$\bigvee_{j \in J} \left(\gamma_j(\vec{x}) \land \exists y \left(dist(y,\vec{x}) > 2r+1 \land \delta_j(y) \right) \right).$$

Wir wissen bereits, dass jede der Formeln $\gamma_j(\vec{x})$ lokal um $\vec{x}$ und damit insbes. in GNF ist.
Zum Nachweis, dass die Formel $\vartheta_2(\vec{x})$ äquivalent zu einer Formel in GNF ist, genügt es daher, im Folgenden zu zeigen, dass für jedes $j \in J$ die Formel $\exists y \left(dist(y,\vec{x}) > 2r+1 \land \delta_j(y) \right)$ äquivalent zu einer Formel in GNF ist.
Sei also $j \in J$ beliebig.
Wir schreiben im Folgenden kurz $\delta(y)$, um die Formel $\delta_j(y)$ zu bezeichnen, und wir setzen

$$\tilde{r} := 2r+1 \quad \text{und} \quad \mu(\vec{x}) := \exists y \left(dist(y,\vec{x}) > \tilde{r} \land \delta(y) \right).$$

Wir wissen bereits, dass $\delta(y)$ r'-lokal um x ist.

Unser Ziel ist, zu zeigen, dass die Formel

$$\mu(\vec{x}) := \exists y \left(\mathrm{dist}(y,\vec{x}) > r' \wedge \delta(y) \right)$$

äquivalent zu einer Formel in GNF ist

(... und dies ist der anspruchsvollste Teil im ganzen Beweis des Satzes von Gaifman).

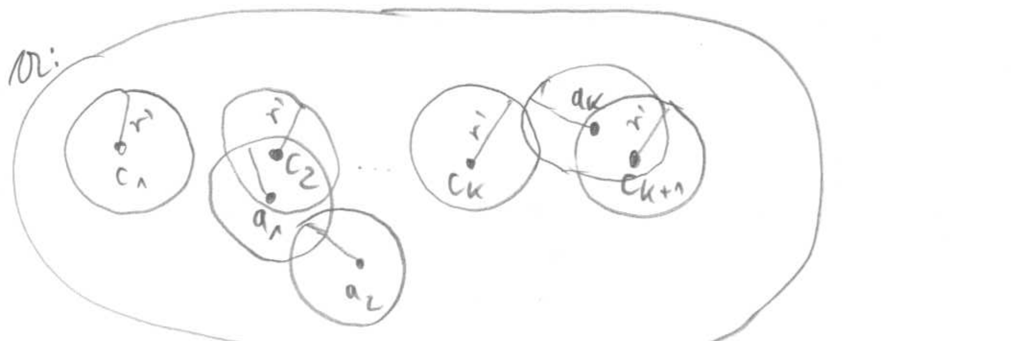
Sei dazu $k \geq 1$ die Länge des Tupels $\vec{x}$, d.h. $\vec{x} = x_1, \dots, x_k$.

Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Struktur und sei $\vec{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ eine Belegung für $\vec{x}$.

Im Folgenden versuchen wir, zu verstehen, wann genau $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$ gilt.

<u>Beobachtung 1</u>: Falls es $k+1$ verschiedene Elemente $c_1, \dots, c_{k+1} \in A$ gibt, die paarweisen Abstand $> 2r'$ voneinander haben, so dass für alle $j \in \{1, \dots, k+1\}$ $\mathfrak{A} \models \delta[c_j]$ gilt, so gilt auch $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$,

denn:



Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt: $N_{r'}^{\mathfrak{A}}(a_i)$ enthält höchstens eins der Elemente $c_1, \dots, c_k, c_{k+1}$.

Daher gibt es ein $j \in \{1, \dots, k+1\}$ so dass

$$c_j \notin N_{r'}^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k) = N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$$

Für dieses c_j gilt also: $Dist^{\mathfrak{A}}(\vec{a}, c_j) > r'$ und $\mathfrak{A} \models \delta[c_j]$. Daher gilt $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$.

$\square$ Beobachtung 1

Die Voraussetzung in Beobachtung 1 lässt sich offensichtlicherweise durch den basis-lokalen Satz

$$\chi_{k+1} := \exists z_1 \dots \exists z_{k+1} \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k+1} dist(z_i, z_j) > 2r' \right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k+1} \delta(z_i) \right)$$

beschreiben.

Analog zu χ_{k+1} definieren wir für jedes $\ell \in \{1, \dots, k+1\}$ den basis-lokalen Satz

$$(*)_3 \quad \chi_\ell := \exists z_1 \dots \exists z_\ell \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq \ell} dist(z_i, z_j) > 2r' \right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{\ell} \delta(z_i) \right).$$

Beobachtung 1 bedeutet, dass $\chi_{k+1} \models \mu(\vec{x})$.

Aber natürlich könnte $\mu(\vec{x})$ auch dann in einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ für eine Belegung $\vec{a}$ erfüllt sein, wenn χ_{k+1} nicht gilt.

Sei $\ell_{\mathfrak{A}} \in \{0,1,\dots,k+1\}$ folgendermaßen gewählt:

$$\ell_{\mathfrak{A}} := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathfrak{A} \not\models \chi_1 \\ \max\{\ell \in \{1,\dots,k+1\} : \mathfrak{A} \models \chi_\ell\} \end{cases}$$

<u>Beobachtung 2</u>: Falls $\ell_{\mathfrak{A}} = k+1$, so gilt $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$

<u>Beobachtung 3</u>: Falls $\ell_{\mathfrak{A}} = 0$, so gilt: $\mathfrak{A} \not\models \exists y\, \delta(y)$,
und daher auch $\mathfrak{A} \not\models \mu[\vec{a}]$.

Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass $\ell_{\mathfrak{A}} \in \{1,\dots,k\}$ ist. Gemäß der Wahl von $\ell_{\mathfrak{A}}$ wissen wir, dass $\mathfrak{A} \models \chi_{\ell_{\mathfrak{A}}}$ und $\mathfrak{A} \not\models \chi_{\ell_{\mathfrak{A}}+1}$.

<u>Fall I</u>: Es gibt <u>keine</u> $c_1,\dots,c_{\ell_{\mathfrak{A}}} \in N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$, so dass $c_1,\dots,c_{\ell_{\mathfrak{A}}}$ paarweise den Abstand $>2r'$ voneinander haben und $\mathfrak{A} \models \delta[c_j]$ für alle $j \in \{1,\dots,\ell_{\mathfrak{A}}\}$.

Wegen $\mathfrak{A} \models \chi_{\ell_{\mathfrak{A}}}$ können wir dann folgern, dass es mindestens ein $b \in A$ mit $b \notin N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ geben muss, für das $\delta[b]$ gilt.
In Fall I gilt also: $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$.

<u>Fall II</u>: Es gibt ein $b \in N_{3r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$, so dass $b \notin N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ und $\mathfrak{A} \models \delta[b]$.
Dann gilt offensichtlicherweise, dass $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$.

<u>Fall III</u>: Es gilt weder Fall I noch Fall II. D.h.:

<u>(I)</u>: Es gibt $c_1, \dots, c_{\ell_{\mathfrak{A}}} \in N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$, so dass $c_1, \dots, c_{\ell_{\mathfrak{A}}}$ paarweise den Abstand $> 2r'$ voneinander haben und $\mathfrak{A} \models \delta[c_j]$ für alle $j \in \{1, \dots, \ell_{\mathfrak{A}}\}$, und

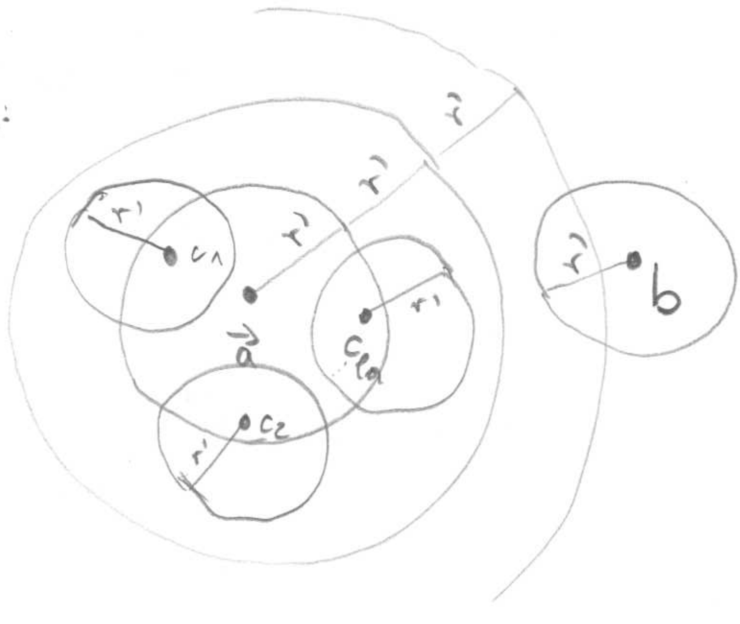
<u>(II)</u>: es gibt kein $b \in N_{3r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ mit $\mathfrak{A} \models \delta[b]$ und $b \notin N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$.

Dann gilt: $\mathfrak{A} \not\models \mu[\vec{a}]$, denn:

Angenommen, $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$, dann gibt es ein $b \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \delta[b]$ und $b \notin N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$.

Wegen (II) gilt: $b \notin N_{3r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$.

<u>Skizze:</u>



Wegen $c_1, \dots, c_{\ell_{\mathfrak{A}}} \in N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ folgt: $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(b, \{c_1, \dots, c_{\ell_{\mathfrak{A}}}\}) > 2r'$.

Somit sind $c_1, \dots, c_{\ell_{\mathfrak{A}}}, b$ $\ell_{\mathfrak{A}}+1$ Elemente vom paarweisen Abstand $> 2r'$, die alle die Formel $\delta(y)$ erfüllen.

Daher gilt: $\mathfrak{A} \models \chi_{\ell_{\mathfrak{A}}+1}$ $\lightning$ Widerspruch zur Wahl von $\ell_{\mathfrak{A}}$ $\square$ Fall III.

Insgesamt wissen wir nun, dass für jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Belegung $\vec{a} \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$$

$\iff$
- $\mathfrak{A} \models \chi_{k+1}$ oder
- es gibt ein $\ell_{\mathfrak{A}} \in \{1, \dots, k\}$ so dass $\mathfrak{A} \models \chi_{\ell_{\mathfrak{A}}}$ und $\mathfrak{A} \not\models \chi_{\ell_{\mathfrak{A}}+1}$ und es gilt Fall I oder Fall II.

$\circledast_4$

("$\Leftarrow$" folgt aus Beobachtung 2 und Fall I und Fall II; "$\Rightarrow$" folgt (per Kontraposition) aus Beobachtung 3 und Fall III).

Fall I lässt sich offensichtlicherweise durch die folgende Formel $\kappa_{\ell_{\mathfrak{A}}, I}(\vec{x})$ beschreiben:

$$\kappa_{\ell_{\mathfrak{A}}, I}(\vec{x}) := \neg \exists z_1 \dots \exists z_{\ell_{\mathfrak{A}}} \Big(\bigwedge_{i=1}^{\ell_{\mathfrak{A}}} \mathrm{dist}(z_i, \vec{x}) \leq r' \;\wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq \ell_{\mathfrak{A}}} \mathrm{dist}(z_i, z_j) > 2r' \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{\ell_{\mathfrak{A}}} \delta(z_i) \Big)$$

Man sieht leicht, dass diese Formel lokal um $\vec{x}$ ist (genauer gesagt: $(r'+r)$-lokal)

Fall II lässt sich durch die Formel

$$\kappa_{\ell_{\mathfrak{A}}, II}(\vec{x}) := \exists z \big(\mathrm{dist}(z, \vec{x}) \leq 3r' \wedge \mathrm{dist}(z, \vec{x}) > r' \wedge \delta(z) \big)$$

beschreiben. Klar: $\kappa_{\ell_{\mathfrak{A}}, II}$ ist lokal um $\vec{x}$ (genauer: $(3r'+r)$-lokal)

Aus $\circledast_4$ folgt, dass die Formel $\mu(\vec{x})$ äquivalent ist zur Formel

$$\chi_{k+1} \vee \bigvee_{\ell=1}^{k} \Big(\chi_\ell \wedge \neg\chi_{\ell+1} \wedge \big(\varkappa_{\ell,\mathrm{I}}(\vec{x}) \vee \varkappa_{\ell,\mathrm{II}}(\vec{x}) \big) \Big);$$

und dies ist eine Formel in GNF.

Damit ist nun (endlich) Fall 4 des Beweises des Satzes von Gaifman abgeschlossen.
Insgesamt haben wir per Induktion nach dem Aufbau von FO[σ]-Formeln gezeigt, dass jede FO[σ]-Formel äquivalent zu einer Formel in GNF ist.
Außerdem führt der obige Beweis unmittelbar zu einem Algorithmus, der bei Eingabe einer Formel φ eine zu φ äquivalente Formel in GNF berechnet.
Dies schließt den Beweis des Satzes von Gaifman ab.

□