Satz 3.36

Sei σ eine endliche, Funktionen-freie Signatur.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien σ-Strukturen, $k, m \in \mathbb{N}$,

$\vec{a}' = a_1', \ldots, a_k' \in A$ und $\vec{b}' = b_1', \ldots, b_k' \in B$.

Dann sind äquivalent:

(a) Duplicator hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$

(b) $\left(W_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\right)_{j \leq m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und

$$\left(\vec{a}', (c^{\mathfrak{A}})_{c \in \sigma} \mapsto \vec{b}', (c^{\mathfrak{B}})_{c \in \sigma}\right) \in W_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

(c) Es gibt $(I_j)_{j \leq m}$, so dass $(I_j)_{j \leq m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und

$$\left(\vec{a}', (c^{\mathfrak{A}})_{c \in \sigma} \longmapsto \vec{b}', (c^{\mathfrak{B}})_{c \in \sigma}\right) \in I_m.$$

Beweis:

"(a) $\Rightarrow$ (b)": Gilt gemäß der Definition der Menge $W_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ die Gewinnpositionen für Duplicator.

"(b) $\Rightarrow$ (c)": Gilt mit $(I_j)_{j \leq m} := \left(W_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\right)_{j \leq m}$.

"$(c) \Rightarrow (a)$": Gemäß Voraussetzung gibt es $(I_j)_{j \leq m}$, so dass $(I_j)_{j\leq m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und

$(\vec{a}', (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \mapsto \vec{b}', (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma}) \in I_m$.

Per Induktion nach i zeigen wir, dass Duplicator $(I_j)_{j\leq m}$ nutzen kann, um das Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$ so zu spielen, dass für jedes $i \in \{0,\dots,m\}$ gilt:

$(*)_i$: Sind $a_1,\dots,a_i$ bzw $b_1,\dots,b_i$ die in den Runden $1,\dots,i$ in A bzw B gewählten Elemente, so gibt es einen partiellen Isomorphismus $p \in I_{m-i}$, so dass $a'_1,\dots,a'_k, (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma}, a_1,\dots,a_i \in \mathrm{Def}(p)$ und

$p(a'_j) = b'_j$ für alle $j \in \{1,\dots,k\}$,

$p(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ für alle $c \in \sigma$ und

$p(a_j) = b_j$ für alle $j \in \{1,\dots,i\}$.

$i=0$: $(*)_0$ gilt, da $(\vec{a}', (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \mapsto \vec{b}', (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma}) \in I_m$.

$i \to i+1$: Sei p der partielle Isomorphismus aus I_{m-i}, der gemäß Induktionsannahme $(*)_i$ existiert.

Fall 1: Spoiler wählt in Runde $i+1$ ein $a_{i+1} \in A$.

Gemäß der "Hin-Eigenschaft" gibt es eine Erweiterung $q \supseteq p$ in I_{m-i-1}, in deren Definitionsbereich a_{i+1} liegt.

Duplicator kann in Runde $i+1$ daher mit $b_{i+1} := q(a_{i+1})$ antworten und hat damit die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt.

Fall 2: Spoiler wählt in Runde $i+1$ ein $b_{i+1} \in B$.

Gemäß der "Her-Eigenschaft" gibt es eine Erweiterung $q \supseteq p$ in I_{m-i-1}, in deren Bild b_{i+1} liegt.

Duplicator kann daher mit einem a_{i+1} antworten, für das $q(a_{i+1}) = b_{i+1}$ gilt, und hat damit die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt. $\square$

Als direkte Folgerung aus dem Satz von Ehrenfeucht und Satz 3.36 erhalten wir:

Korollar 3.37

Sei σ eine endliche, funktionen-freie Signatur, seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$.

Äquivalent sind:

(a) $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$ (d.h. Dupl. gewinnt das m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$)

(b) $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$

(c) $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$

(d) $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}}$

Die Äquivalenz von (b) und (c), d.h.

$\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$

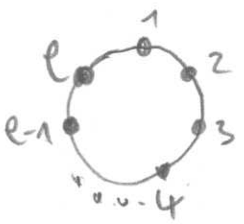
ist als "Satz von Fraïssé" bekannt.

Beispiel 3.38

Die Verwendung des Satzes von Fraïssé liefert einen alternativen Beweis von Satz 3.25(a):

Conn ist nicht FO-definierbar in UGraphs:

Beweis: Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei G_ℓ ein ungerichteter Kreis der Länge ℓ, d.h. G_ℓ hat Knotenmenge $\{1,\dots,\ell\}$ und Kantenmenge



$$E^{G_\ell} := \{(i,i+1) : 1 \leq i < \ell\} \cup \{(\ell,1)\}$$
$$\cup \{(i+1,i) : 1 \leq i < \ell\} \cup \{(1,\ell)\}$$

Für $\ell, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $G_{\ell,k}$ die disjunkte Vereinigung von G_ℓ und G_k, d.h. $G_{\ell,k}$ besteht aus zwei ungerichteten Kreisen der Längen ℓ und k.

Wir zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle ℓ, k mit $\ell, k > 2^m$ gilt: $G_\ell \cong_m G_{\ell,k}$.

Dazu sei für jedes $j \in \{0,\dots,m\}$ I_j die Menge aller partiellen Isomorphismen p von G_ℓ nach $G_{\ell,k}$, für die gilt:

- $|Def(p)| \leq m-j$ und
- für alle $a, a' \in Def(p)$ gilt:

  $Dist^{G_\ell}(a,a') = Dist^{G_{\ell,k}}(p(a), p(a'))$ oder

  $Dist^{G_\ell}(a,a'),\ Dist^{G_{\ell,k}}(p(a), p(a')) \geq 2^{j+1}$.

<u>Beachte</u>: I_m besteht gerade aus der Abbildung "$\emptyset$", deren Definitionsbereich leer ist.

Per Induktion kann man leicht nachweisen, dass I_j für jedes $j \in \{m, m-1, \dots, 0\}$ die Hin- und die Her-Eigenschaft hat und dass $I_j \neq \emptyset$ ist.

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass

$$(I_j)_{j \leq m} : G_\ell \cong_m G_{\ell,k}, \quad \text{d.h.}$$

G_ℓ und $G_{\ell,k}$ sind m-isomorph.

Gemäß des Satzes von Fraïssé gilt daher f.a. $m \in \mathbb{N}$ und alle k, ℓ mit $k, \ell > 2^m$, dass $G_\ell \equiv_m G_{\ell,k}$.

Da G_ℓ zusammenhängend ist, $G_{\ell,k}$ aber nicht, folgt, dass Conn <u>nicht</u> FO-definierbar in UGraphs ist. $\square$

Kapitel 4: Der Satz von Gaifman

Der Satz von Gaifman liefert ein tiefes Verständnis dafür, welche Aussagen durch Formeln der Logik erster Stufe getroffen werden können. In gewisser Weise besagt der Satz von Gaifman, dass die Logik erster Stufe nur "lokale" Eigenschaften von Strukturen beschreiben kann.

Der Einfachheit halber werden wir <u>in diesem Kapitel</u> nur <u>endliche relationale Signaturen</u> betrachten, d.h. endliche Signaturen, die ausschließlich aus Relationssymbolen bestehen.

4.1 Formulierung und Beweis des Satzes von Gaifman

Bevor wir die exakte Formulierung des Satzes von Gaifman angeben können, benötigen wir zunächst noch einige Notationen und einfache Beobachtungen.

Lemma 4.1

Sei σ eine endliche relationale Signatur und sei $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine FO[σ]-Formel $dist_{\leq r}(y,x)$, so dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $a,b \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models dist_{\leq r}[b,a] \iff Dist^{\mathfrak{A}}(b,a) \leq r.$$

Analog gibt es für jede Zahl $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und das Variablentupel $\vec{x} = x_1,\dots,x_k$ eine FO[σ]-Formel $dist_{\leq r}(y,x_1,\dots,x_k)$ (kurz: $dist_{\leq r}(y,\vec{x})$), so dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$, alle $\vec{a} = a_1,\dots,a_k \in A$ und alle $b \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models dist_{\leq r}[b,a_1,\dots,a_k] \iff Dist^{\mathfrak{A}}(b,\{a_1,\dots,a_k\}) \leq r.$$

Beweis: Per Induktion nach r.

$r=0$: $dist_{\leq 0}(y,x) := y=x$

$r=1$: $dist_{\leq 1}(y,x) := \Big(y=x \ \vee$

$$\bigvee_{R\in\sigma} \exists u_1 \cdots \exists u_{ar(R)} \Big(R u_1 \cdots u_{ar(R)} \wedge \bigvee_{1\leq i,j\leq ar(R)} (u_i = x \wedge u_j = y) \Big)\Big)$$

$r \geq 2$:

$$\mathrm{dist}_{\leq r}(y,x) := \Big(\mathrm{dist}_{\leq r-1}(y,x) \ \vee \ \exists z \big(\mathrm{dist}_{\leq r-1}(y,z) \wedge \mathrm{dist}_{\leq 1}(z,x)\big)\Big)$$

Für $\vec{x} = x_1, \ldots, x_k$ setzen wir (für jedes $r \in \mathbb{N}$)

$$\mathrm{dist}_{\leq r}(y,\vec{x}) := \bigvee_{i=1}^{k} \mathrm{dist}_{\leq r}(y,x_i).$$

$\square$

<u>Notation 4.2:</u>

Zur besseren Lesbarkeit von Formeln schreiben wir im Folgenden oft

$$\mathrm{dist}(y,\vec{x}) \leq r \quad \text{an Stelle von } \mathrm{dist}_{\leq r}(y,\vec{x}),$$

und

$$\mathrm{dist}(y,\vec{x}) > r \quad \text{an Stelle von } \neg\mathrm{dist}_{\leq r}(y,\vec{x}).$$

Als nächstes führen wir einige Begriffe zur <u>Lokalität von Formeln</u> ein. Informell gesprochen ist eine Formel $\varphi(\vec{x})$ genau dann lokal, wenn sie nur über eine r-Nachbarschaft von $\vec{x}$ "spricht".

Definition 4.3 (lokale Formeln)

Sei σ eine relationale Signatur und sei $\psi(\vec{x})$ eine $FO[\sigma]$-Formel mit
$\cancel{\emptyset} \neq frei(\psi) = \{\vec{x}\}$.

(a) Sei $r \in \mathbb{N}$.
Die Formel ψ heißt r-lokal um $\vec{x}$, falls für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $\vec{a} \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}] \iff \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \models \psi[\vec{a}]$$

(b) Die Formel ψ heißt lokal um $\vec{x}$, falls es eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ gibt, so dass ψ r-lokal um $\vec{x}$ ist.

Beispiel 4.4

Für jedes $r \in \mathbb{N}$ ist die Formel

$$dist(y, x) > 2 \cdot r$$

aus Lemma 4.1 r-lokal um y, x

Man sieht leicht, dass eine Formel, die r-lokal um $\vec{x}$ ist, auch für jedes $r' \geq r$ r'-lokal um $\vec{x}$ ist.

Eine Möglichkeit, r-Lokalität syntaktisch zu erzwingen, besteht darin, explizit sämtliche Quantoren einer Formel auf die r-Nachbarschaft von $\vec{x}$ einzuschränken. Dies wird durch die folgende Definition formalisiert.

Definition 4.5 (r-Relativierung)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, sei $\psi(\vec{x})$ eine $FO[\sigma]$-Formel mit $\emptyset \neq frei(\psi) = \{\vec{x}\}$, und sei $r \in \mathbb{N}$.
Die r-Relativierung von ψ um $\vec{x}$ ist die Formel

$$\psi^{N_r(\vec{x})}(\vec{x}),$$

die aus $\psi(\vec{x})$ entsteht, indem zunächst alle durch Quantoren gebundenen Variablen so umbenannt werden, dass sie von $\vec{x}$ verschieden sind, und danach jede Teilformel der Form

- $\exists z\, \varphi$ durch $\exists z\, (\mathrm{dist}(z, \vec{x}) \leq r \wedge \varphi)$
- $\forall z\, \varphi$ durch $\forall z\, (\mathrm{dist}(z, \vec{x}) \leq r \rightarrow \varphi)$

ersetzt wird.

Offensichtlich gilt:

<u>Lemma 4.6</u> („r-Relativierungen sind r-lokal")

Sei σ eine endliche relationale Signatur, sei $\psi(\vec{x})$ eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel mit $\cancel{\emptyset \neq}$ $\mathrm{frei}(\psi) = \{\vec{x}\}$ und sei $r \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: Die r-Relativierung $\psi^{N_r(\vec{x})}(\vec{x})$ ist r-lokal um $\vec{x}$, und es gilt für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $\vec{a} \in A$, dass

$$\mathfrak{A} \models \psi^{N_r(\vec{x})}[\vec{a}] \iff \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \models \psi^{N_r(\vec{x})}[\vec{a}]$$

$$\iff \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \models \psi[\vec{a}].$$

<u>Beweis:</u> Übung.