I: Logik erster Stufe (Teil 1)

Die Logik erster Stufe (Prädikatenlogik) besitzt eine

- Syntax, die festlegt, welche Zeichenketten Formeln der Logik erster Stufe sind, und eine
- Semantik, die festlegt, welche "Bedeutung" einzelne Formeln haben.

Die Logik erster Stufe beschäftigt sich mit Objekten und Aussagen über deren Eigenschaften.

Kapitel 1: Syntax und Semantik der Logik erster Stufe

Vor der Einführung von Syntax und Semantik der Logik erster Stufe wenden wir uns zunächst den Objekten zu, über die Formeln der Logik erster Stufe "reden" können.

1.1 Strukturen

Die Objekte, über die Formeln der Logik erster Stufe Aussagen treffen können, heißen Strukturen.
Viele Objekte lassen sich auf natürliche Weise durch solche Strukturen repräsentieren, beispielsweise

- Graphen $G = (V, E)$ oder Bäume $B = (V, E)$
- die natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation, $(\mathbb{N}, +, \times)$
- die reellen Zahlen mit Addition, Multiplikation und den Konstanten 0 und 1, $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$
- Datenbanken

usw.

Die im Folgenden definierten Signaturen legen den "Typ" (bzw das "Format") der entsprechenden Strukturen fest.

Definition 1.1:
Eine Signatur (auch: Symbolmenge bzw. Vokabular) ist eine Menge σ von Relationssymbolen, Funktionssymbolen und/oder Konstantensymbolen.

Jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine <u>Stelligkeit</u> (bzw <u>Arität</u>, engl: arity)

$$ar(R) \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{bzw} \quad ar(f) \in \mathbb{N}_{>0}.$$

(Notation: $\mathbb{N} := \{0,1,2,3,\ldots\}$; $\mathbb{N}_{>0} := \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

<u>Notation 1.2:</u>

- Der griechische Buchstabe σ bezeichnet in dieser Veranstaltung stets eine Signatur
- Für Relationssymbole verwenden wir normalerweise Großbuchstaben wie $R, P, E, Q, R_1, R_2, \ldots$.
  Für Funktionssymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$.
  Für Konstantensymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie $c, d, c_1, c_2, \ldots$
- Gelegentlich verwenden wir als Relations- und Funktionssymbole auch Zeichen wie
  $\leq$ (2-stelliges Relationssymbol) bzw.
  $+, \times$ (2-stellige Funktionssymbole),
  und als Konstantensymbole Zahlen wie $0, 1$.

- Die Stelligkeit eines Relations- oder Funktionssymbols deuten wir häufig an, indem wir sie unter das Symbol schreiben.

  Beispiel: Die Notation $\underset{2}{R}$ deutet an, dass R ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Definition 1.3:

Eine σ-Struktur (bzw. Struktur über σ) ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$, bestehend aus:

- einer nicht-leeren Menge A, dem so genannten Universum (bzw. Träger, Grundbereich; engl: domain) von $\mathfrak{A}$ und
- einer auf σ definierten Abbildung α, die
  - jedem Relationssymbol $R \in \sigma$ eine Relation $\alpha(R) \subseteq A^{ar(R)}$ der Stelligkeit $ar(R)$ zuordnet
  - jedem Funktionssymbol $f \in \sigma$ eine Funktion $\alpha(f): A^{ar(f)} \longrightarrow A$ zuordnet
  - jedem Konstantensymbol $c \in \sigma$ ein Element $\alpha(c) \in A$ zuordnet.

Notation 1.4:

- Strukturen bezeichnen wir meistens mit Fraktur-Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}, \dots$; das Universum der Strukturen durch die entsprechenden lateinischen Großbuchstaben $A, B, G, \dots$.

- Ist $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ eine σ-Struktur, so schreiben wir für jedes Symbol $S \in \sigma$ oft $S^{\mathfrak{A}}$ an Stelle von $\alpha(S)$.

  An Stelle von $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ schreiben wir oft auch
  $$\mathfrak{A} = (A, (S^{\mathfrak{A}})_{S \in \sigma}).$$

  Falls σ endlich und von der Form
  $$\sigma = \{R_1, \dots, R_k, f_1, \dots, f_e, c_1, \dots, c_m\}$$
  ist, so schreiben wir auch
  $$\mathfrak{A} = (A, R_1^{\mathfrak{A}}, \dots, R_k^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \dots, f_e^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_m^{\mathfrak{A}}),$$
  um eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ zu bezeichnen.

<u>Beispiel 1.5</u> (Arithmetische Strukturen)

Sei $\sigma_{Ar} := \{ \leq, +, \times, 0, 1 \}$, wobei

$\leq$ ein 2-stelliges Relationssymbol,

$+, \times$ zwei 2-stellige Funktionssymbole und

$0, 1$ zwei Konstantensymbole sind.

<u>(a)</u> Das <u>Standardmodell der Arithmetik</u> ist die

σ_{Ar}-Struktur

$$\mathcal{N} := \left(\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}} \right), \quad \text{wobei}$$

$\leq^{\mathcal{N}}$ die natürliche lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist, $+^{\mathcal{N}}$ und $\times^{\mathcal{N}}$ die Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind und $0^{\mathcal{N}}$ bzw $1^{\mathcal{N}}$ die Zahlen 0 bzw 1 sind.

<u>(b)</u> Entsprechend können wir σ_{Ar}-Strukturen $\mathcal{Z}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ mit Universum $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ definieren.

<u>Beispiel 1.6</u> (Graphen und Bäume)

Sei $\sigma_{Graph} := \{ E \}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Jeder gerichtete Graph bzw. gerichtete Baum (V, E) (V: Knotenmenge, $E \subseteq V \times V$: Kantenmenge) lässt sich als

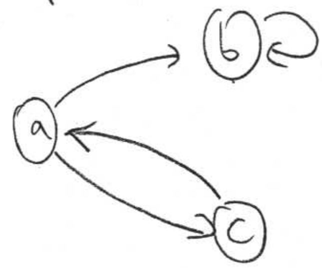
σ_{Graph}-Struktur $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ mit

- Universum $A := V$ und
- Relation $E^{\mathfrak{A}} := E$

auffassen.

<u>Beispiel</u>:

Graph



zugehörige σ_{Graph}-Struktur:

$\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ mit

- $A = \{a, b, c\}$
- $E^{\mathfrak{A}} = \{(a,b), (b,b), (a,c), (c,a)\}$

<u>Beispiel 1.7</u> (Verwandtschaftsbeziehungen)

Um Verwandtschaftsbeziehungen zu modellieren, können wir die Signatur σ benutzen, die aus folgenden Symbolen besteht:

- 1-stellige Funktionssymbole Vater, Mutter
  (<u>Bedeutung</u>: $\text{Mutter}^{\mathfrak{A}}(a)$ bezeichnet die Mutter von Person a)
- 2-stellige Relationssymbole Geschwister, Vorfahr
  (<u>Bedeutung</u>: $(a,b) \in \text{Geschwister}^{\mathfrak{A}}$ besagt, dass a und b Geschwister sind;

$\text{Vorfahr}^{\mathfrak{A}}(a,b)$ besagt, dass a ein Vorfahr von b ist).

<u>Frage:</u> Wann sind zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ "prinzipiell gleich" (Fachbegriff: isomorph)?

<u>Antwort:</u> Falls $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$ entsteht, indem man die Elemente des Universums von $\mathfrak{A}$ umbenennt.
Analog zum Begriff der Isomorphie von Graphen wird dies durch folgende Definition präzisiert:

<u>Definition 1.8</u>

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen.
Ein <u>Isomorphismus</u> von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist eine Abbildung $\pi: A \to B$ mit folgenden Eigenschaften

1) π ist bijektiv

2) für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$, alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:
$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

3) für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$, alle k-stelligen Funktionssymbole

$f \in \sigma$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$\pi\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k)\right) = f^{\mathfrak{B}}\left(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)\right)$$

4) Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ gilt:

$$\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

<u>Notation</u>: Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen.
Wir schreiben $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ um anzudeuten, dass π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist.

<u>Definition 1.10</u>:
Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind <u>isomorph</u> (kurz: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$), wenn es einen Isomorphismus π von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gibt.

<u>Lemma 1.9</u>
Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen und sei $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.
Dann gilt für die Umkehrabbildung π^{-1}, dass $\pi^{-1} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

<u>Beweis</u>: einfaches Nachrechnen (Übung)