Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt 9. Dezember 2008

Logik in der Informatik

Wintersemester 2008 / 2009

Übungsblatt 8

Zu bearbeiten bis Dienstag, 16. Dezember 2008

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Finden Sie eine Sprache L, für die Sie beweisen können, dass folgendes gilt:
L ist regulär, aber L ist nicht sternfrei regulär.

Hinweis: Nutzen Sie den Satz von McNaughton und Papert sowie die Ergebnisse aus Kapitel 3 der Vorlesung.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Für jede Signatur σ, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält, ist das folgende Problem *nicht semi-entscheidbar*:

> ALLGEMEINGÜLTIGKEIT AUF Fin:
> *Eingabe:* Ein FO[σ]-Satz φ.
> *Frage:* Gilt für alle *endlichen* σ-Strukturen $\mathfrak{A}$, dass $\mathfrak{A} \models \varphi$?

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Trakhtenbrot.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Sei M eine Menge und sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül über M.

Definition:

(a) Eine Ableitungsregel $\dfrac{a_1 \cdots a_n}{b}$ über M heißt **in $\mathcal{K}$ ableitbar**, wenn b aus $\{a_1, \ldots, a_n\}$ in $\mathcal{K}$ ableitbar ist.

(b) Zwei Kalküle $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ über M heißen **gleich stark**, wenn für alle $V \subseteq M$ gilt: Die Menge der aus V in $\mathcal{K}_1$ ableitbaren Elemente ist gleich der Menge der aus V in $\mathcal{K}_2$ ableitbaren Elemente.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \ldots, a_n, b \in M$ gilt:
$\dfrac{a_1 \cdots a_n}{b}$ ist genau dann in $\mathcal{K}$ ableitbar, wenn $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K} \cup \{\dfrac{a_1 \cdots a_n}{b}\}$ gleich stark sind.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Regel $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \quad \vdash \quad \chi}{\Gamma \quad \vdash \quad ((\varphi \wedge \psi) \to \chi)}$ im Sequenzenkalkül $\mathscr{S}$ ableitbar ist.