

Logik in der Informatik
Wintersemester 2008 / 2009

Übungsblatt 7

Zu bearbeiten bis Dienstag, 9. Dezember 2008

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Finden Sie einen auf dem Satz von Hanf beruhenden Beweis der folgenden Variante des Satzes von Seese:

Für jede Zahl $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und jeden FO[$\{E\}$]-Satz φ gibt es einen Algorithmus, der das Auswertungsproblem für φ auf der Klasse aller endlichen Graphen von Grad $\leq d$ in Zeit $\mathcal{O}(n)$ löst, wobei $n = |V^G| + |E^G|$ für $G = (V^G, E^G)$ ist.

(Eingabe: Ein endlicher Graph G vom Grad $\leq d$; Frage: Gilt $G \models \varphi$?).

Aufgabe 2:

(25 Punkte)

Arbeiten Sie die Details des Beweises von Satz 6.7 aus und geben Sie eine detaillierte Analyse des Zeit- und Platzbedarfs Ihres Algorithmus an.

Aufgabe 3:

(25 Punkte)

Sei σ eine relationale Signatur.

Zeigen Sie, dass es für jede FO[σ]-Formel φ eine zu φ äquivalente FO[σ]-Formel $\tilde{\varphi}$ mit $\text{frei}(\tilde{\varphi}) = \text{frei}(\varphi)$ gibt, in der höchstens $br(\varphi)$ viele verschiedene Variablen vorkommen.

Aufgabe 4:

(25 Punkte)

Beweisen Sie Satz 6.11 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie folgendes:

Ist $\sigma = \{P_1, \dots, P_k\}$ eine endliche Signatur, die aus k Relationssymbolen der Stelligkeit 1 besteht, so ist das Erfüllbarkeitsproblem für FO[σ] auf FIN entscheidbar.