Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

25. November 2008

Logik in der Informatik

Wintersemester 2008 / 2009

Übungsblatt 6

Zu bearbeiten bis Dienstag, 2. Dezember 2008

Aufgabe 1: (30 Punkte)

Entwickeln Sie einen Algorithmus, welcher bei der Eingabe von 2 Zahlen $k, r \geqslant 1$ und einer FO$[\sigma]$-Formel $\psi(x_1, ..., x_k, y)$, die r-lokal um $x_1, ..., x_k, y$ ist, eine FO$[\sigma]$-Formel $\tilde{\psi}(x_1, ..., x_k, y)$ ausgibt, für die gilt:

(I) $\tilde{\psi}(x_1, ..., x_k, y)$ ist eine Boolesche Kombination von

- (i) Formeln, die r-lokal um $x_1, ..., x_k$ sind, und
- (ii) Formeln, die r-lokal um y sind,

und

(II) für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $a_1, ..., a_k, b \in A$ mit $Dist^{\mathfrak{A}}(b, \{a_1, ..., a_k\}) > 2r + 1$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \tilde{\psi}[a_1, ..., a_k, b] \quad \iff \quad \mathfrak{A} \models \psi[a_1, ..., a_k, b].$$

Aufgabe 2: (15 Punkte)

Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei $\mathfrak{G}_{k,\ell}$ das in Aufgabe 4 von Blatt 4 definierte $(k \times \ell)$-Gitter. Sei *Diag* die *einstellige* Anfrage, die jedem Gitter $\mathfrak{G}_{k,\ell}$ die Diagonale

$$Diag(\mathfrak{G}_{k,\ell}) := \{(i, i) : 1 \leqslant i \leqslant min(k, \ell)\}$$

zuordnet. Zeigen Sie: Die Anfrage *Diag* ist nicht FO-definierbar.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jede Anfrage Q und jede Klasse S von σ-Strukturen gilt:

$$Q \text{ ist FO-definierbar auf } S \implies Q \text{ ist Gaifman-lokal auf } S.$$

Gilt auch die Umkehrung? D.h. gilt für jede Anfrage Q:

$$Q \text{ ist Gaifman-lokal auf } S \implies Q \text{ ist FO-definierbar auf } S?$$

Belegen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder beweisen, dass die Umkehrung gilt, oder indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: (35 Punkte)

Sei Σ ein endliches Alphabet. Die Klasse SFR_Σ aller **sternfreien regulären Ausdrücke über** Σ ist rekursiv wie folgt definiert: das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ, für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ. Sind $r \in \mathsf{SFR}_\Sigma$ und $s \in \mathsf{SFR}_\Sigma$, so gehören auch die Ausdrücke $\bar{r}$, $(r|s)$ und $(r\cdot s)$ zu SFR_Σ.

Jeder sternfreie reguläre Ausdruck r **beschreibt** eine Sprache $L(r)$, die wie folgt definiert ist: $L(\emptyset) = \emptyset$, für jedes $a \in \Sigma$ ist $L(a) = \{a\}$, und für alle $r, s \in \mathsf{SFR}_\Sigma$ ist $L(\bar{r}) := \Sigma^* \setminus L(r)$, $L((r|s)) := L(r) \cup L(s)$ und $L((r\cdot s)) := \{uw : u \in L(r) \text{ und } w \in L(s)\}$.

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **sternfrei regulär**, wenn es ein $r \in \mathsf{SFR}_\Sigma$ mit $L(r) = L$ gibt.

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und sei $\sigma := \{\leqslant, P_a, P_b\}$.

(a) Geben Sie sternfreie reguläre Ausdrücke an, welche die folgenden Sprachen beschreiben:

  (i) Σ^*

  (ii) a^*b^*

  (iii) $a(a|b)^*bb(a|b)^*$

(b) Zeigen Sie, dass folgendes gilt:
Für jede sternfreie reguläre Sprache L gibt es einen $FO[\sigma]$-Satz φ, der die Sprache L beschreibt (im Sinne von Aufgabe 4 von Blatt 1).