Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

18. November 2008

Logik in der Informatik

Wintersemester 2008 / 2009

Übungsblatt 5

Zu bearbeiten bis Dienstag, 25. November 2008

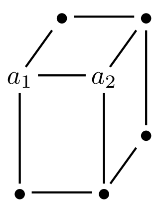
Aufgabe 1: (25 Punkte)

In dieser Aufgabe wird die Notation aus Aufgabe 4 Blatt 1 benutzt.
Beweisen Sie das so genannte *Kompositionslemma*, d.h. zeigen Sie, dass folgendes gilt:
Ist $m \in \mathbb{N}$ und sind w_1, w_2, u_1, u_2 nicht-leere Worte über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, so dass $\mathfrak{A}_{w_1} \approx_m \mathfrak{A}_{w_2}$ und $\mathfrak{A}_{u_1} \approx_m \mathfrak{A}_{u_2}$, so gilt für $n_1 := |w_1|$ und $n_2 := |w_2|$, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}(\mathfrak{A}_{w_1 u_1}, n_1, \mathfrak{A}_{w_2 u_2}, n_2)$ hat.

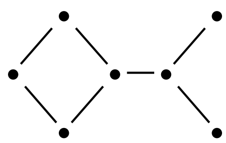
Aufgabe 2: (25 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Graphen $\mathcal{G} := (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ und $\mathcal{H} := (V^{\mathcal{H}}, E^{\mathcal{H}})$.

Graph $\mathcal{G}$:



Graph $\mathcal{H}$:



(a) Finden Sie $b_1, b_2 \in V^{\mathcal{H}}$, so dass $a_1, a_2 \mapsto b_1, b_2 \in \text{Part}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.

(b) Was ist das größte m, so dass es $b_1, b_2 \in V^{\mathcal{H}}$ gibt mit $(\mathcal{G}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{H}, b_1, b_2)$? Belegen Sie Ihre Aussage, indem Sie für ihre Zahl m geeignete Elemente $b_1, b_2 \in V^{\mathcal{H}}$ und ein Hin- und Her-System $(I_j)_{j \leqslant m} : (\mathcal{G}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{H}, b_1, b_2)$ angeben.

(c) Erklären Sie, warum ein größeres als das von Ihnen angegebene m nicht möglich ist, indem Sie eine entsprechende Gewinnstrategie für Spoiler angeben.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Stellen Sie für jede der beiden folgenden Formeln fest, ob sie in Gaifman-Normalform ist. Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls eine äquivalente Formel in Gaifman-Normalform an.

(a) $\varphi(x) \;:=\; \forall y\, Exy$

(b) $\varphi(x_1, x_2) \;:=\; \neg x_1 = x_2 \wedge \forall y \left(Ex_1 y \vee Ex_2 y \right)$

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Sei M eine endliche Menge von Formeln. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe einer beliebigen Formel $\varphi \in BC(M)$ eine zu φ äquivalente Formel in disjunktiver Normalform ausgibt, d.h. eine Formel der Form

$$\bigvee_{i \in I} (\bigwedge_{j \in J_i} \psi_{i,j})$$

wobei I und $(J_i)_{i \in I}$ endliche Indexmengen sind und $\psi_{i,j} \in M \cup \{\neg\chi : \chi \in M\}$ (für alle $i \in I$ und alle $j \in J_i$).