Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt 11. November 2008

Logik in der Informatik

Wintersemester 2008 / 2009

Übungsblatt 4

Zu bearbeiten bis Dienstag, 18. November 2008

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Für $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei $\mathsf{k\text{-}Col}$ die Klasse aller k-färbbaren endlichen ungerichteten Graphen. Zeigen Sie:

(a) $\mathsf{2\text{-}Col}$ ist nicht FO-definierbar in $\mathsf{UGraphs}$

(b) $\mathsf{3\text{-}Col}$ ist nicht FO-definierbar in $\mathsf{UGraphs}$.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}$ gilt:

$$\mathsf{C} \text{ ist FO-definierbar in } \mathsf{S} \implies \mathsf{C} \text{ ist Hanf-lokal in } \mathsf{S}.$$

Gilt auch die Umkehrung? D.h. gilt für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}$:

$$\mathsf{C} \text{ ist Hanf-lokal in } \mathsf{S} \implies \mathsf{C} \text{ ist FO-definierbar in } \mathsf{S}?$$

Belegen Sie ihre Antwort, indem Sie entweder beweisen, dass die Umkehrung gilt, oder indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Sei σ eine Funktionen-freie Signatur und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen.

- Die Struktur $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ ist die σ-Struktur mit Universum $A \times B$, Konstanten $c^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}})$ (f.a. Konstantensymbole $c \in \sigma$) und Relationen $R^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} := \{\big((a_1,b_1),\ldots,(a_r,b_r)\big) \ : \ (a_1,\ldots,a_r) \in R^{\mathfrak{A}}$ und $(b_1,\ldots,b_r) \in R^{\mathfrak{B}}\}$ (f.a. Relationssymbole $R \in \sigma$ mit $r := ar(R)$).
- Falls σ keine Konstantensymbole enthält und A und B disjunkt sind, so ist $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$ die σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ und Relationen $R^{\mathfrak{A}\sqcup\mathfrak{B}} := R^{\mathfrak{A}} \cup R^{\mathfrak{B}}$ (f.a. $R \in \sigma$).

Es sei $m \in \mathbb{N}$, und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ seien σ-Strukturen.
Nutzen Sie die EF-Spiel-Charakterisierung von $\equiv_m$, um folgendes zu zeigen:

(a) Falls $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$, so auch $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$.

(b) Falls σ keine Konstantensymbole enthält und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, so gilt:
Falls $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$, so auch $\mathfrak{A}_1 \sqcup \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \sqcup \mathfrak{B}_2$.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Sei $\sigma := \{S_v, S_h\}$ mit zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h. Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k\times\ell)$-*Gitter* $\mathfrak{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{1,\ldots,k\} \times \{1,\ldots,\ell\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathfrak{G}_{k,\ell}} &:= \{\big((i,j),(i{+}1,j)\big) : 1 \leqslant i < k,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell\} \\ S_h^{\mathfrak{G}_{k,\ell}} &:= \{\big((i,j),(i,j{+}1)\big) : 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j < \ell\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es keinen FO$[\sigma]$-Satz φ gibt, so dass für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt:
$\mathfrak{G}_{k,\ell} \models \varphi \iff k = \ell$.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3.