Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

4. November 2008

Logik in der Informatik

Wintersemester 2008 / 2009

Übungsblatt 3

Zu bearbeiten bis Dienstag, 11. November 2008

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Beweisen Sie Satz 3.8, d. h. zeigen Sie:
Für alle Funktionen-freien Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\vec{a}' := a_1', ..., a_k' \in A$, $\vec{b}' := b_1', ..., b_k' \in B$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Genau einer der beiden Spieler (Spoiler bzw. Duplicator) hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Hinweis: Per Induktion nach m ist der Beweis einfach und kurz.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Beweisen Sie die Richtung "$\Longrightarrow$" von Satz 3.11, d.h. zeigen Sie, dass für alle $m \geqslant 1$ und alle endlichen linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, \leqslant^{\mathfrak{A}}, min^{\mathfrak{A}}, max^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \leqslant^{\mathfrak{B}}, min^{\mathfrak{B}}, max^{\mathfrak{B}})$ gilt: Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat *Spoiler* eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Sei $\sigma := \{P, Q\}$, wobei P, Q einstellige Relationssymbole sind. Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei $\mathfrak{A}_{k,\ell}$ eine σ-Struktur mit Universum $A_{k,\ell} = P^{\mathfrak{A}_{k,\ell}} \cup Q^{\mathfrak{A}_{k,\ell}}$, wobei $P^{\mathfrak{A}_{k,\ell}} \cap Q^{\mathfrak{A}_{k,\ell}} = \emptyset$ und $|P^{\mathfrak{A}_{k,\ell}}| = k$, $|Q^{\mathfrak{A}_{k,\ell}}| = \ell$ gilt.
Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}_{k_0,\ell_0} \equiv_m \mathfrak{A}_{k_1,\ell_1}$ genau dann gilt, wenn

$$(k_0 = k_1 \text{ oder } k_0, k_1 \geqslant m) \quad \text{und} \quad (\ell_0 = \ell_1 \text{ oder } \ell_0, \ell_1 \geqslant m).$$

Aufgabe 4: (30 Punkte)

(a) RGraphs sei die Klasse aller endlichen Graphen $G = (V, E^G, s^G, t^G)$ mit $s^G,\ t^G \in V$; Reach sei die Klasse aller $G \in$ RGraphs, in denen es einen Pfad vom Knoten s^G zum Knoten t^G gibt. Verwenden Sie die Methode der logischen Reduktionen, um Folgendes zu zeigen: Reach ist nicht FO-definierbar in RGraphs.

(b) Zeigen Sie: Es gibt keinen FO$[\leqslant, P_a, P_b]$-Satz, der die Sprache $L \subseteq \{a, b\}^*$ beschreibt, die aus genau den nicht-leeren Worten $w \in \{a, b\}^*$ besteht, in denen die Anzahl der in w vorkommenden as gerade ist.

(c) Sei Ham die Klasse aller endlichen Graphen, die einen Hamiltonkreis enthalten. Zeigen Sie: Ham ist nicht FO-definierbar in der Klasse Graphs aller endlichen Graphen.

Zur Erinnerung: Ein Hamiltonkreis ist ein Kreis, der jeden Knoten genau einmal durchläuft.

(d) Sei Azyklisch die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen, die keinen Kreis enthalten. Zeigen Sie: Azyklisch ist nicht FO-definierbar in der Klasse UGraphs aller endlichen ungerichteten Graphen.