Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

3. Februar 2009

Logik in der Informatik

Wintersemester 2008 / 2009

Übungsblatt 13

Zu bearbeiten bis Dienstag, 10. Februar 2009

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Seien φ_1 und φ_2 zwei Σ_1-Formeln. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

(a) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ ist äquivalent zu einer Σ_1-Formel.

(b) $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ ist äquivalent zu einer Σ_1-Formel.

(c) Es gibt eine Σ_1-Formel φ, so dass es keine zu $\neg\varphi$ äquivalente Σ_1-Formel gibt.

Hinweis: Sie können verwenden, dass jede Σ_1-definierbare Relation rekursiv aufzählbar ist (vgl. Bemerkung 9.24).

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Sei $\mathcal{Z}$ die σ_{Ar}-Struktur mit Universum $\mathbb{Z}$ und Konstanten $0^{\mathcal{Z}} = 0$ und $1^{\mathcal{Z}} = 1$, für die $\leqslant^{\mathcal{Z}}$, $+^{\mathcal{Z}}$ und $\times^{\mathcal{Z}}$ die natürliche lineare Ordnung, Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ sind.

Zeigen Sie: $\mathrm{Th}(\mathcal{Z})$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Beweisen Sie die Behauptungen (d) und (e) von Lemma 9.28, d.h. zeigen Sie, dass für jedes Modell $\mathfrak{A}$ von Q und für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\mathfrak{A} \models \underline{m} + \underline{n} = \underline{m+n}$.

(b) $\mathfrak{A} \models \underline{m} \times \underline{n} = \underline{m \cdot n}$.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Sei T eine Menge von FO$[\sigma_{Ar}]$-Formeln, sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion, und sei $\varphi(x_1, .., x_k, y)$ eine FO$[\sigma_{Ar}]$-Formel, die f in T repräsentiert.

Zeigen Sie, dass für alle $m_1, .., m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt:
Falls $f(m_1, .., m_k, n) \neq n$, so $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, .., \underline{m_k}, \underline{n})$.