Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

20. Januar 2009

Logik in der Informatik

Wintersemester 2008 / 2009

Übungsblatt 11

Zu bearbeiten bis Dienstag, 27. Januar 2009

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Sei $\sigma := \{c_r : r \in \mathbb{R}\}$ eine Signatur, die aus überabzählbar vielen Konstantensymbolen besteht. Finden Sie eine Menge Φ von FO$[\sigma]$-Formeln, die erfüllbar ist, aber kein abzählbares Modell besitzt.

Aufgabe 2: (30 Punkte)

Beweisen Sie Bemerkung 8.16, d.h. zeigen Sie folgendes: Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Struktur. Dann gilt:

(a) Ist $\mathfrak{A}$ endlich, so gilt für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$: $\quad \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

(b) Ist $\mathfrak{A}$ unendlich, so gibt es eine σ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} \not\cong \mathfrak{A}$.

Hinweise: Für (b) können Sie den aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem benutzen. Für (a) können Sie folgendermaßen vorgehen: Nutzen Sie Aufgabe 2 von Übungsblatt 1, um zu zeigen, dass (a) für *endliche* Signaturen gilt. Folgern Sie daraus, dass für *beliebige* Signaturen gilt: Falls $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, so ist $|B| = |A|$. Folgern Sie daraus, dass (a) für abzählbare Signaturen gilt. Folgern Sie dann, dass (a) auch für beliebige Signaturen gilt.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Zeigen Sie:

(a) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen ist axiomatisierbar.

(b) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen ist nicht endlich axiomatisierbar.

(c) Die Klasse aller endlichen azyklischen Graphen ist nicht axiomatisierbar.

Zur Erinnerung: Ein gerichteter Graph ist azyklisch, falls er keinen Kreis endlicher Länge besitzt.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Sei σ eine Signatur und sei Φ eine Menge von FO$[\sigma]$-Sätzen. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

(a) Φ ist eine vollständige, erfüllbare σ-Theorie $\iff$ es gibt eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\Phi = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.

(b) Φ ist eine erfüllbare σ-Theorie $\iff$
es gibt eine nicht-leere Klasse K von σ-Strukturen mit $\Phi = \bigcap_{\mathfrak{A} \in K} \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.