Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

21. Oktober 2008

Logik in der Informatik

Wintersemester 2008 / 2009

Übungsblatt 1

Zu bearbeiten bis Dienstag, 28. Oktober 2008

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Geben Sie σ_{Ar}-Formeln an, die im Standardmodell $\mathcal{N}$ der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:

(a) Jede natürliche Zahl ist Summe von vier Quadratzahlen.

(b) Jede Primzahl ist Summe zweier Quadratzahlen.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Sei σ eine Signatur, die aus endlich vielen Symbolen besteht, und sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Struktur, deren Universum A endlich ist.

(a) Geben Sie einen σ-Satz $\varphi_{\mathfrak{A}}$ an, der die Struktur $\mathfrak{A}$ bis auf Isomorphie eindeutig beschreibt. D.h. es soll für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$ gelten: $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

(b) Beweisen Sie, dass ihre Formel $\varphi_{\mathfrak{A}}$ die in (a) geforderte Eigenschaft tatsächlich besitzt. D.h. zeigen Sie, dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$ gilt: $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Beweisen Sie das Isomorphielemma (Satz 1.36 aus der Vorlesung).

Aufgabe 4: (30 Punkte)

Sei $\sigma = \{\leqslant, P_a, P_b\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol $\leqslant$ sowie zwei 1-stelligen Relationssymbolen P_a und P_b besteht.
Einem endlichen Wort $w = w_1 \cdots w_n$ der Länge $n \geqslant 1$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ ordnen wir die folgende σ-Struktur $\mathfrak{A}_w = (A_w, \leqslant^{\mathfrak{A}_w}, P_a^{\mathfrak{A}_w}, P_b^{\mathfrak{A}_w})$ zu:

- $A_w := \{1, .., n\}$,
- $\leqslant^{\mathfrak{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf $\{1, .., n\}$,
- $P_a^{\mathfrak{A}_w} := \{\, i \in A_w \ :\ w_i = a \,\}$,
- $P_b^{\mathfrak{A}_w} := \{\, i \in A_w \ :\ w_i = b \,\}$.

Ein FO[σ]-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathfrak{A}_w \models \varphi$.

(a) Welche Sprache beschreibt der folgende FO[σ]-Satz φ_0?

$$\varphi_0 \;:=\; \exists x\, \exists y \Big(\big(x \leqslant y \;\; \wedge \; \neg x{=}y \big) \;\wedge\; \forall z \big((z \leqslant x \;\wedge\; P_a z) \;\vee\; (y \leqslant z \;\wedge\; P_b z) \big) \Big)$$

(b) Geben Sie einen FO[σ]-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $a(a|b)^*bb(a|b)^*$ definierte Sprache beschreibt.

(c) Können Sie auch einen FO[σ]-Satz finden, der die Sprache aller Worte beschreibt, in denen die Anzahl der in ihnen vorkommenden as gerade ist?
Falls ja, geben Sie den Satz an; falls nein, versuchen Sie zu erklären, warum es keinen solchen Satz zu geben scheint.