Definition 7.14 (reguläre Sprachen)

Sei Σ ein endliches Alphabet.

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **regulär**,

falls es einen NFA $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$

mit $L(A) = L$ gibt

(– d.h. für jedes Eingabewort $w \in \Sigma^*$ gilt:

A akzeptiert w $\Leftrightarrow$ $w \in L$).

Klar: Um zu zeigen, dass eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist, reicht es, einen NFA oder ein DFA A mit $L(A) = L$ zu finden.

Frage: Wie kann man nachweisen, dass eine bestimmte Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ *nicht* regulär ist?

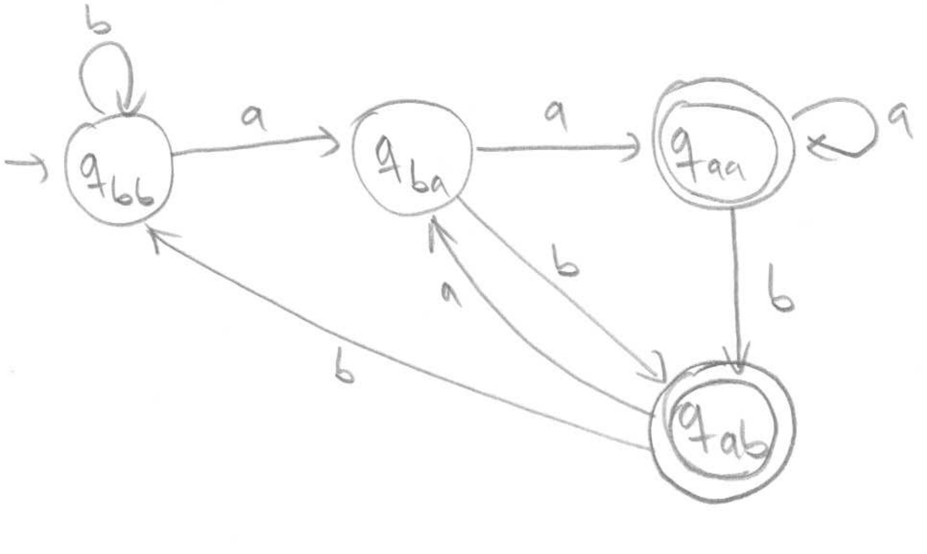
Ein nützliches Werkzeug dazu ist der folgende Satz 7.16, der unter dem Namen "Pumping-Lemma" bekannt ist.

Bevor wir den Satz präzise angeben, betrachten wir zunächst ein Beispiel:

<u>Beispiel 7.15</u>

Sei A_3 der endliche Automat aus Bsp 7.7 (c), d.h.

A_3:



A_3 akzeptiert beispielsweise das Eingabewort

$x = babaa$,

indem es nacheinander die Zustände

$q_{bb} \xrightarrow{b} q_{bb} \xrightarrow{a} \underline{q_{ba}} \xrightarrow{b} q_{ab} \xrightarrow{a} \underline{q_{ba}} \xrightarrow{a} q_{aa}$ besucht.

Dieser Weg durch die graphische Darstellung von A_3 enthält einen Kreis

$$\underline{q_{ba}} \xrightarrow{b} q_{ab} \xrightarrow{a} \underline{q_{ba}},$$

der beliebig oft durchlaufen werden kann, so dass man (egal ob der Kreis 0-mal, 1-mal, 2-mal, 3-mal, ... durchlaufen wird) jedesmal ein Eingabewort erhält, das von A_3 akzeptiert wird, nämlich für jede Zahl $i \geq 0$ das Eingabewort $ba(ba)^i a$.

Der folgende Satz 7.16 beruht auf demselben Prinzip sowie auf der Tatsache, dass in jedem Graph auf z Knoten gilt: Jeder Weg der Länge $\geq z$ enthält einen Kreis (d.h. mind. ein Knoten wird auf dem Weg mehr als 1-mal besucht).

Satz 7.16 (Pumping-Lemma)

Sei Σ ein endliches Alphabet.
Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gibt es eine Zahl $z \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq z$ gilt:

Es gibt eine Zerlegung von x in Worte $u, v, w \in \Sigma^*$, so dass

(1) $x = uvw$

(2) $|uv| \leq z$

(3) $|v| \geq 1$

(4) für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt: $uv^iw \in L$.
(d.h.: $uw \in L$, $uvw \in L$, $uvvw \in L$, $uvvvw \in L$, ...)

Beweis: Da L regulär ist, gibt es einen NFA $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L$.
Sei $z := |Q|$ die Anzahl der Zustände von A.

Sei nun $x \in \Sigma^*$ ein beliebiges Wort der Länge $|x| \geq z$, das in L liegt, d.h., das von A akzeptiert wird.
Sei $q_0, q_1, \dots, q_{|x|}$ die Folge von Zuständen,

die A beim Verarbeiten von x durchläuft.

Da $|x| \geq z = |Q|$ ist, können die Zustände

$q_0, q_1, \dots, q_z$ nicht alle verschieden sein.

Daher gibt es ein $k \geq 0$ und ein $\ell \geq 1$, so dass

$q_k = q_{k+\ell}$ und $k+\ell \leq z$.

Wir wählen folgende Zerlegung von x in Worte $u, v, w \in \Sigma^*$:

- u besteht aus den ersten k Buchstaben von x
- v besteht aus den nächsten ℓ Buchstaben von x
- w besteht aus den restlichen Buchstaben von x

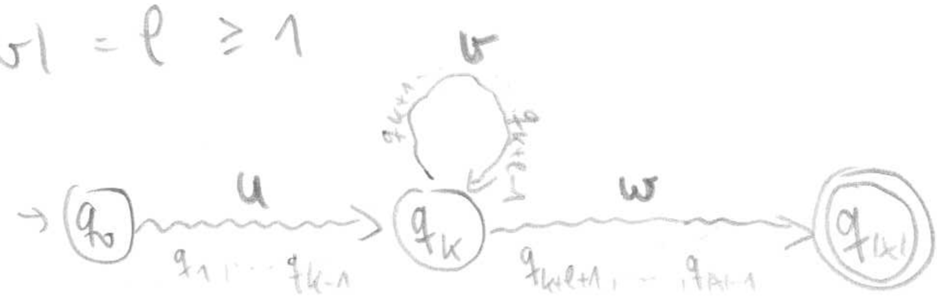
Offensichtlich gilt:

(1) $x = uvw$

(2) $|uv| = k+\ell \leq z$

(3) $|v| = \ell \geq 1$

Skizze:



Daher gilt für jedes $i \geq 0$:
A akzeptiert das Eingabewort uv^iw, d.h. $uv^iw \in L$.

□

Unter Verwendung des Pumping-Lemmas kann man nachweisen, dass gewisse Sprachen nicht regulär sind:

Beispiel 7.17

Sei $\Sigma := \{a,b\}$.

Die Sprache $L := \{ a^n b^n : n \in \mathbb{N} \}$ ist nicht regulär.

(zum Vergleich: Gemäß Lemma 7.7(a) ist die Sprache $L_1 := \{ a^n b^m : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \}$ regulär).

Beweis: Durch Widerspruch.

Angenommen, L ist regulär.

Dann sei $z \in \mathbb{N}$ gemäß dem Pumping-Lemma (Satz 7.16) gewählt.

Betrachte das Wort $x := a^z b^z$.

Klar: $x \in L$ und $|x| \geq z$.

Gemäß Pumping-Lemma gibt es eine Zerlegung von x in Worte $u, v, w \in \{a,b\}^*$, so dass

(1) $x = uvw$

(2) $|uv| \leq z$

(3) $|v| \geq 1$

(4) f.a. $i \in \mathbb{N}$ gilt: $uv^iw \in L$.

Wegen $x = a^z b^z = uvw$ und $|uv| \leq z$ und $|v| \geq 1$ gibt es eine Zahl $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq 1$ s.d. $v = a^\ell$

Wegen (4) gilt insbes. für $i=0$, dass $uw \in L$

Wegen $x = uvw = a^z b^z$ und $v = a^\ell$ gilt

$$uw = a^{z-\ell} b^z \underset{\ell \geq 1}{\notin} \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\} = L \quad \text{↯ Wid}$$

$\square$

Auf ähnliche Weise kann man auch zeigen, dass keine der folgenden Sprachen regulär ist:

- $\{a^n b^m : n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m\}$
- $\{ww : w \in \{a,b\}^*\}$
- $\{w : w \in \{a,b\}^*, w = w^R\}$ ("Palindrome")
- $\{w \in \{a\}^* : |w|$ ist eine Primzahl$\}$
- $\{w \in \{a\}^* : |w|$ ist eine Quadratzahl, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ s.d. $|w| = n^2\}$