Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

3. März 2009

Diskrete Modellierung (WS 08/09)
Klausur (Modulabschlussprüfung)

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

⇓ BITTE GENAU LESEN ⇓

- Außer einem dokumentenechten Schreibstift sind zu dieser Klausur keine weiteren Hilfsmittel erlaubt. Bitte beachten Sie, dass das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel eine Täuschung darstellt und zwangsläufig zum Nichtbestehen der Klausur führt.

  Insbesondere müssen Sie Ihre Handys vor Beginn der Klausur ausschalten.
- Bitte legen Sie Ihre Goethe-Card bzw. Ihren Studierendenausweis und einen gültigen Lichtbildausweis deutlich sichtbar an Ihren Platz, damit wir im Laufe der Klausur die Identität überprüfen können.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
- Überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar der Klausur aus insgesamt 16 durchnummerierten Blättern besteht.
- Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen direkt an die dafür vorgesehene Stelle. Gegebenenfalls können Sie auch die Rückseiten und die beigefügten Zusatzblätter benutzen. Weitere Blätter sind auf Nachfrage erhältlich.
- Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung dies verlangt.
- Jedes Blatt der abgegebenen Lösung muss mit Namen, Vornamen und Matrikelnummer gekennzeichnet sein; andernfalls werden diese Blätter nicht gewertet.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift – mit Bleistift angefertigte Lösungen werden nicht gewertet.
- Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **eine** Lösung.
- In der Klausur können maximal 100 Punkte erreicht werden. Die in den Übungsaufgaben im WS 08/09 erworbenen Bonuspunkte werden zu der in der Klausur erreichten Punktzahl hinzuaddiert. Werden insgesamt $z \geq 50$ Punkte erreicht, so ist die Prüfung bestanden. Die Noten verteilen sich wie folgt:

Note	z	Note	z	Note	z	Note
1:			$z \geq 90$	$1,0$	$90 > z \geq 85$	$1,3$
2:	$85 > z \geq 80$	$1,7$	$80 > z \geq 76$	$2,0$	$76 > z \geq 72$	$2,3$
3:	$72 > z \geq 67$	$2,7$	$67 > z \geq 63$	$3,0$	$63 > z \geq 59$	$3,3$
4:	$59 > z \geq 54$	$3,7$	$54 > z \geq 50$	$4,0$		

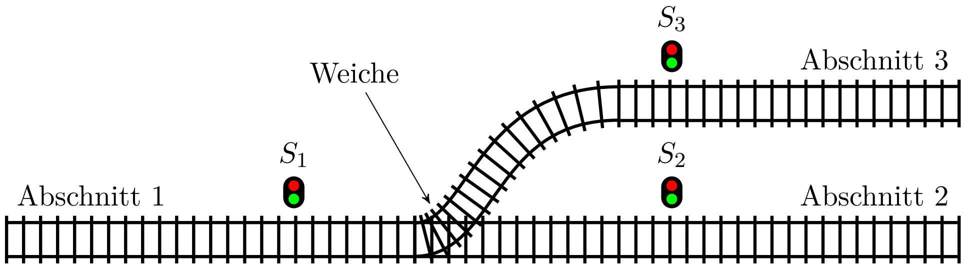
- Die Ergebnisse der Klausur und Termine zur Klausureinsicht werden spätestens am 10.4.2009 auf der zur Vorlesung gehörigen Internetseite (`www.informatik.uni-frankfurt.de/~tkshp/lehre/WS0809/DM/`) bekanntgegeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Klausur	Bonus	Gesamt
maximale Punkte	21	21	12	11	15	20	100	10	110
erreichte Punkte									

Note:

Aufgabe 1: **(21 Punkte)**

(a) Es sei die folgende Weiche einer Bahnanlage gegeben:



Die drei Signale S_1, S_2 und S_3 geben an, ob ein Zug vom entsprechenden Gleisabschnitt über die Weiche fahren darf: Leuchtet S_i grün, dann darf ein Zug vom Gleisabschnitt i aus über die Weiche fahren.

Die Weiche ist entweder auf „geradeaus fahren" oder „abbiegen" eingestellt. Wenn sie auf „geradeaus fahren" eingestellt ist, dann fahren Züge, die vom Gleisabschnitt 1 aus über die Weiche fahren, auf den Gleisabschnitt 2 und umgekehrt. Ansonsten fahren Züge, die vom Gleisabschnitt 1 aus über die Weiche fahren, auf den Gleisabschnitt 3 und umgekehrt.

Mit Hilfe der folgenden atomaren Aussagen lassen sich nun einfache Anforderungen an die Weichenanlage formulieren:

- X_1: S_1 leuchtet grün.
- X_2: S_2 leuchtet grün.
- X_3: S_3 leuchtet grün.
- X_W: Die Weiche ist auf „geradeaus fahren" eingestellt.

Beispielsweise besagt die aussagenlogische Formel $(\neg X_\mathrm{W} \wedge (X_1 \wedge \neg X_3))$, dass die Weiche auf „abbiegen" eingestellt ist, S_1 grün leuchtet und S_3 rot leuchtet.

Geben Sie aussagenlogische Formeln an, die nur die Variablen X_1, X_2, X_3 und X_W benutzen und Folgendes aussagen:

- Wenn S_2 grün leuchtet, dann ist die Weiche auf „geradeaus fahren" eingestellt, und wenn S_3 grün leuchtet, dann ist die Weiche auf „abbiegen" eingestellt. (2 Pkte)

- Höchstens eines der drei Signale S_1, S_2, S_3 leuchtet grün. D.h. wenn S_1 grün leuchtet, dann leuchten S_2 und S_3 nicht grün und analog für die anderen Signale. Beachten Sie, dass auch der Fall eintreten kann, bei dem keines der drei Signale grün leuchtet. (3 Pkte)

(b) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar und/oder allgemeingültig ist. (Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.) (7 Pkte)

Geben Sie außerdem folgendes für jede Formel an: Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel erfüllt. Falls die Formel nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel *nicht* erfüllt.

- $\varphi = \Big(((X_1 \vee X_2) \leftrightarrow X_3) \;\wedge\; (X_1 \wedge \neg X_3) \Big)$

erfüllbar: ☐ ja ☐ nein
allgemeingültig: ☐ ja ☐ nein

Falls φ erfüllbar ist, geben Sie hier eine zu φ passende Belegung an, die φ erfüllt:

Falls φ nicht allgemeingültig ist, geben Sie hier eine zu φ passende Belegung an, die φ nicht erfüllt:

- $\psi = \Big(\big(X_1 \;\wedge\; (X_1 \rightarrow (X_2 \vee X_3))\big) \;\rightarrow\; X_3 \Big)$

erfüllbar: ☐ ja ☐ nein
allgemeingültig: ☐ ja ☐ nein

Falls ψ erfüllbar ist, geben Sie hier eine zu ψ passende Belegung an, die ψ erfüllt:

Falls ψ nicht allgemeingültig ist, geben Sie hier eine zu ψ passende Belegung an, die ψ nicht erfüllt:

(c) Welche der folgenden Formeln sind in Negationsnormalform (NNF), disjunktiver Normalform (DNF) und/oder konjunktiver Normalform (KNF)? (3 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen halben Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein halber Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

	$\big((\neg X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_3)) \vee \neg X_2\big)$	$\big((X_1 \vee \neg X_2) \wedge ((\neg X_1 \vee X_3) \vee X_4)\big)$
in NNF?	☐ ja ☐ nein	☐ ja ☐ nein
in DNF?	☐ ja ☐ nein	☐ ja ☐ nein
in KNF?	☐ ja ☐ nein	☐ ja ☐ nein

(d) Geben Sie eine zur Formel (6 Pkte)

$$\varphi \ := \ ((X_2 \rightarrow X_1) \vee (X_2 \wedge \neg X_3))$$

äquivalente aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform an. Geben Sie auch Ihren Lösungsweg an.

Aufgabe 2: **(21 Punkte)**

(a) Sei $G = (V, E)$ der gerichtete Graph mit der folgenden Adjazenzliste:

Knoten	Nachfolger
a	(b, e)
b	(d)
c	(a, d)
d	(a, c, e)
e	(b, c)

(i) Geben Sie die graphische Darstellung von G an. Geben Sie außerdem die Kantenmenge E von G an und repräsentieren Sie G durch eine Adjazenzmatrix.

graphische Darstellung: (2 Pkte)

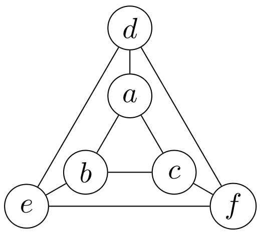
$E =$ (1 Pkt)

Adjazenzmatrix: (1 Pkt)

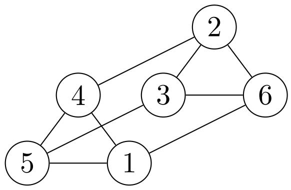
(ii) Wie groß ist der Eingangsgrad des Knotens a in G? (1 Pkt)

(iii) Geben Sie einen Kreis in G an, der durch den Knoten a verläuft und *nicht* einfach ist: (1 Pkt)

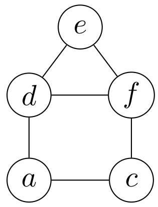
(b) Betrachten Sie die folgenden ungerichteten Graphen G_1, G_2, G_3, G_4:



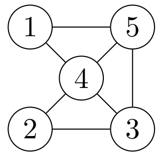
G_1



G_2



G_3



G_4

(i) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (3 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

- G_4 ist ein Teilgraph von G_2. ☐ wahr ☐ falsch
- G_3 ist ein induzierter Teilgraph von G_1. ☐ wahr ☐ falsch
- G_3 und G_4 sind isomorph. ☐ wahr ☐ falsch

(ii) Geben Sie einen Isomorphismus von G_1 nach G_2 an. (2 Pkte)

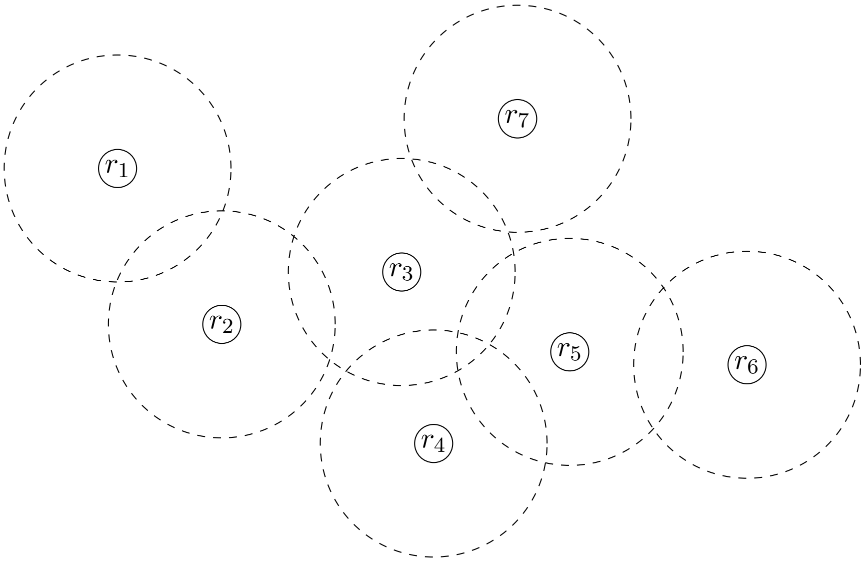
(c) Welche der folgenden Aussagen über Bäume sind wahr, welche falsch? (3 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

- Sind x und y Knoten in einem ungerichteten Baum B, so gibt es in B genau einen einfachen Weg von x nach y. ☐ wahr ☐ falsch
- Es gibt einen Baum B und zwei Knoten x und y in B, so dass es in B mindestens zwei verschiedene einfache Wege von x nach y gibt. ☐ wahr ☐ falsch
- Ist $B = (V, E)$ ein Baum, so gilt $|E| = |V| + 1$. ☐ wahr ☐ falsch

(d) Es seien Radiostationen $r_1, \ldots, r_7$ gegeben. Jeder Radiostation soll eine von drei Frequenzen f_1, f_2, f_3 zugeordnet werden. Radiostationen, die zu dicht beieinander liegen, dürfen allerdings nicht die gleichen Frequenzen zugewiesen bekommen.

Das folgende Diagramm stellt die Lage der einzelnen Radiostationen dar.



Um jede Station ist ein gestrichelter Kreis eingezeichnet. Schneiden sich die Kreise von zwei Radiostationen r_i und r_j, so liegen r_i und r_j zu dicht beieinander und dürfen nicht die gleiche Frequenz zugeordnet bekommen. Wir sagen auch, dass r_i und r_j in Konflikt zueinander stehen. Zum Beispiel stehen r_1 und r_2 in Konflikt zueinander, r_1 und r_3 aber nicht. r_1 und r_2 dürfen also nicht die gleiche Frequenz zugeordnet bekommen, wohingegen r_1 und r_3 auf der gleichen Frequenz senden dürfen.

(i) Geben Sie den Konfliktgraph G an (in graphischer Darstellung). (2 Pkte)

(ii) Weisen Sie jeder der Radiostationen $r_1, \ldots, r_7$ genau eine der drei Frequenzen f_1, f_2, f_3 zu, so dass Radiostationen, die zueinander in Konflikt stehen, nicht der gleichen Frequenz zugeordnet sind. (3 Pkte)

D.h.: Sei V die Menge der Knoten des Konfliktgraphen G aus (i). Geben Sie eine konfliktfreie Knotenmarkierung $m\colon V \to \{1,2,3\}$ an.

(iii) Wie viele Frequenzen werden für die Radiostationen mindestens benötigt? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

Aufgabe 3: **(12 Punkte)**

(a) Sei $\sigma := \{\dot{S}, \dot{G}\}$ eine Signatur mit 2-stelligen Relationssymbolen $\dot{S}$, $\dot{G}$. Sei $\mathfrak{A} = (A, \dot{S}^{\mathfrak{A}}, \dot{G}^{\mathfrak{A}})$ die σ-Struktur, in der

- A die Menge der Spieler eines Turniers ist,
- $\dot{S}^{\mathfrak{A}}$ alle Tupel $(x, y) \in A \times A$ enthält, so dass x gegen y gespielt hat und
- $\dot{G}^{\mathfrak{A}}$ alle Tupel $(x, y) \in A \times A$ enthält, so dass x gegen y gewonnen hat.

(i) Geben Sie eine Formel φ der Logik erster Stufe über der Signatur σ an, die in $\mathfrak{A}$ aussagt, dass es mindestens zwei *verschiedene* Spieler gibt, die noch nicht gegeneinander gespielt haben. (2 Pkte)

$\varphi :=$

(ii) Geben Sie eine Formel ψ der Logik erster Stufe über der Signatur σ an, die in $\mathfrak{A}$ aussagt, dass es keinen Spieler gibt, der in allen Spielen, an denen er teilgenommen hat, gewonnen hat. (2 Pkte)

$\psi :=$

(iii) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was die folgende Formel in $\mathfrak{A}$ aussagt: (2 Pkte)

$$\forall x \forall y \Big(\dot{S}(x, y) \ \rightarrow \ (\dot{G}(x, y) \leftrightarrow \neg \dot{G}(y, x)) \Big)$$

(b) Sei $\sigma := \{\dot{E}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$. Geben Sie für die Formel (6 Pkte)

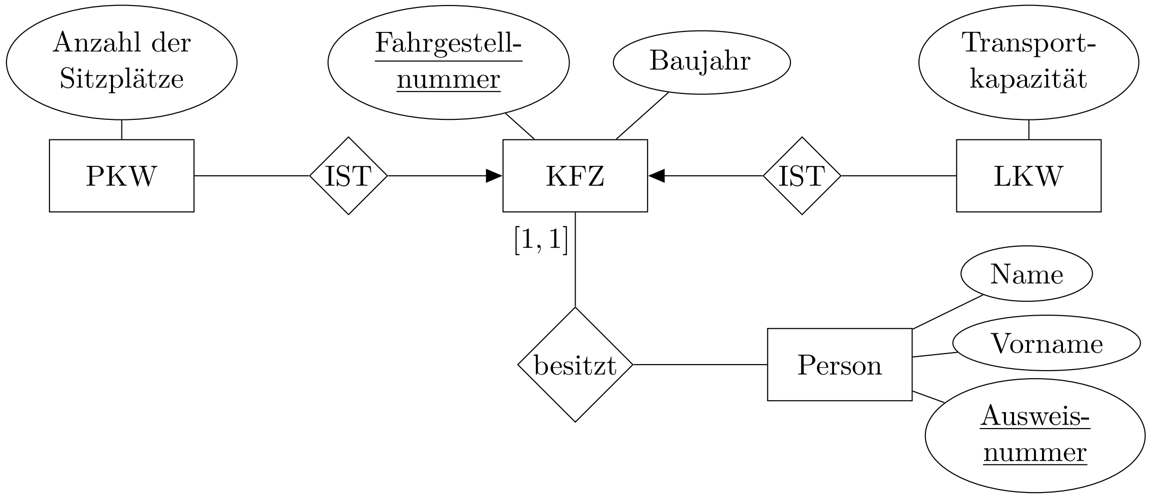
$$\varphi(x,y) \quad := \quad \Big(\; \dot{E}(x,y) \wedge \exists z\big(\dot{E}(y,z) \wedge \dot{E}(z,x)\big) \; \Big)$$

zwei σ-Interpretationen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ an, so dass $\mathcal{I}_1$ die Formel φ erfüllt und $\mathcal{I}_2$ die Formel φ *nicht* erfüllt.

$\mathcal{I}_1 :=$ $\mathcal{I}_2 :=$

Aufgabe 4: **(11 Punkte)**

(a) Es sei folgendes Entity-Relationship-Modell gegeben: (4 Pkte)



Welche der folgenden Aussagen sind im Sinne des oben angegebenen Entity-Relationship-Modells wahr, welche nicht?

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

(i) Es ist möglich, dass es ein KFZ ohne Besitzer gibt. ☐ wahr ☐ falsch

(ii) Jedes KFZ hat genau einen Besitzer. ☐ wahr ☐ falsch

(iii) Es ist möglich, dass es ein PKW (z.B. mit Baujahr 2002) und einen LKW (z.B. mit Baujahr 1997) gibt, die dieselbe Fahrgestellnummer besitzen. ☐ wahr ☐ falsch

(iv) Es ist möglich, dass es zwei Personen mit demselben (Nach)namen und demselben Vornamen gibt. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Sei $G = (T, N, S, P)$ die kontextfreie Grammatik mit

- der Menge der Terminalsymbole $T = \{a, b, c, d\}$
- der Menge der Nichtterminalsymbole $N = \{S, X, Y\}$
- dem Startsymbol S
- der Menge der Produktionen $P = \{ S \to XcYd,\ X \to aY,\ Y \to aY,\ Y \to bY,\ Y \to \varepsilon \}$

(i) Geben Sie für jedes der folgenden Wörter an, ob es zu der von G erzeugten Sprache $L(G)$ gehört. Geben Sie außerdem für jedes Wort, das zur Sprache $L(G)$ gehört, einen Ableitungsbaum an. (4 Pkte)

- *abcbad*

gehört zu $L(G)$? ☐ ja ☐ nein

Falls das Wort zu $L(G)$ gehört, geben Sie hier einen Ableitungsbaum an:

- *bacabad*

gehört zu $L(G)$? ☐ ja ☐ nein

Falls das Wort zu $L(G)$ gehört, geben Sie hier einen Ableitungsbaum an:

(ii) Geben Sie eine (mathematische oder umgangssprachliche) Beschreibung der Sprache $L(G)$ an, die von der oben angegebenen Grammatik G erzeugt wird. (3 Pkte)

Aufgabe 5: **(15 Punkte)**

Die Sprache SFR über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, \varnothing, \sim, |, \cdot, (,)\}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

Basisregeln:
(B1) Das Symbol $\varnothing$ ist in SFR.
(B2) Die Symbole a und b sind in SFR.

Rekursive Regeln:
(R1) Ist $w \in$ SFR, so ist auch $\sim w$ in SFR.
(R2) Sind w_1 und w_2 in SFR, so sind auch $(w_1 \mid w_2)$ und $(w_1 \cdot w_2)$ in SFR.

(a) Welche der folgenden Wörter gehören zur Sprache SFR, welche nicht? (3 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

Wort	... liegt in SFR?	
$((\sim\varnothing \cdot a) \cdot (\sim\varnothing \cdot b))$	☐ ja	☐ nein
$\sim((\sim\varnothing \cdot a) \cdot b) \mid b$	☐ ja	☐ nein
$(\sim(\sim\varnothing \cdot a) \mid ((b \cdot a) \cdot \varnothing))$	☐ ja	☐ nein

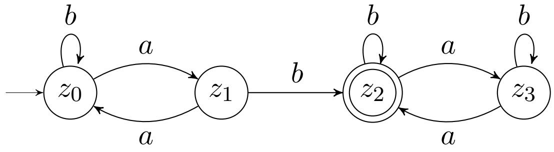
(b) Für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichne $s(w)$ die Anzahl der Vorkommen der Symbole $\varnothing, a, b$ in w und $o(w)$ die Anzahl der Symbole $\sim$, $\mid$ und $\cdot$ in w. Zum Beispiel gilt für $w = ((a \cdot \sim b) \mid \sim a)$, dass $s(w) = 3$ und $o(w) = 4$. (8 Pkte)

Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle Wörter $w \in$ SFR gilt: $s(w) \leq o(w) + 1$.

(c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die genau die Sprache SFR erzeugt. (4 Pkte)

Aufgabe 6: **(20 Punkte)**

(a) Sei A der folgende deterministische endliche Automat: (3 Pkte)



Welche der folgenden Wörter werden von A akzeptiert, welche nicht?

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

Wort	...wird akzeptiert?	
$abbabb$	☐ ja	☐ nein
$babaab$	☐ ja	☐ nein
$aababaa$	☐ ja	☐ nein

(b) Es sei R der folgende reguläre Ausdruck über dem Alphabet $\Sigma := \{0, 1, \dots, 9, .\}$:

$$(\ \varepsilon \mid (1 \mid \cdots \mid 9)(0 \mid 1 \mid \cdots \mid 9)^*\ )\ .\ (0 \mid 1 \mid \cdots \mid 9)(0 \mid 1 \mid \cdots \mid 9)^*$$

(i) Welche der folgenden Wörter liegen in der von R definierten Sprache $L(R)$, welche nicht? (3 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

Wort	...liegt in $L(R)$?	
.075	☐ ja	☐ nein
12	☐ ja	☐ nein
012.56637	☐ ja	☐ nein

(ii) Geben Sie eine (mathematische oder umgangssprachliche) Beschreibung der Sprache $L(R)$ an, die von R definiert wird. (3 Pkte)

(c) Geben Sie die graphische Darstellung eines nicht-deterministischen endlichen Automaten an, der genau diejenigen Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$ akzeptiert, die die Teilwörter ab und ba enthalten, so dass ba mindestens einmal hinter einem Vorkommen von ab steht. (4 Pkte)

D.h. der Automat soll genau die Wörter $w \in \{a, b\}^*$ akzeptieren, für die es Wörter $x, y, z \in \{a, b\}^*$ gibt, so dass $w = xabybaz$.

(d) Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ und zeigen Sie, dass die Sprache (7 Pkte)

$$L \;:=\; \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ enthält genau so viele } a\text{s wie } b\text{s}\}$$

nicht regulär ist.

Hinweis: Verwenden Sie das Pumping-Lemma aus der Vorlesung:

Sei Σ ein endliches Alphabet. Für jede *reguläre* Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gibt es eine Zahl $z \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq z$ gilt: Es gibt eine Zerlegung von x in Worte $u, v, w \in \Sigma^*$, so dass die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

(i) $x = uvw$

(ii) $|uv| \leq z$

(iii) $|v| \geq 1$

(iv) für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt: $uv^iw \in L$.
(d.h.: $uw \in L$, $uvw \in L$, $uvvw \in L$, $uvvvw \in L$, ...)