Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

8. September 2008

Diskrete Modellierung (SS 08)
Klausur (Modulabschlussprüfung)

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

⇓ BITTE GENAU LESEN ⇓

- Außer einem dokumentenechten Schreibstift sind zu dieser Klausur keine weiteren Hilfsmittel erlaubt. Bitte beachten Sie, dass das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel eine Täuschung darstellt und zwangsläufig zum Nichtbestehen der Klausur führt.

  Insbesondere müssen Sie Ihre Handys vor Beginn der Klausur ausschalten.
- Bitte legen Sie Ihre Goethe-Card bzw. Ihren Studierendenausweis und einen gültigen Lichtbildausweis deutlich sichtbar an Ihren Platz, damit wir im Laufe der Klausur die Identität überprüfen können.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
- Überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar der Klausur aus insgesamt 12 durchnummerierten Blättern besteht.
- Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen direkt an die dafür vorgesehene Stelle. Gegebenenfalls können Sie auch die Rückseiten und die beigefügten Zusatzblätter benutzen. Weitere Blätter sind auf Nachfrage erhältlich.
- Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung dies verlangt.
- Jedes Blatt der abgegebenen Lösung muss mit Namen, Vornamen und Matrikelnummer gekennzeichnet sein; andernfalls werden diese Blätter nicht gewertet.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift – mit Bleistift angefertigte Lösungen werden nicht gewertet.
- Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **eine** Lösung.
- In der Klausur können maximal 100 Punkte erreicht werden. Die in den Übungsaufgaben im WS 07/08 erworbenen Bonuspunkte werden zu der in der Klausur erreichten Punktzahl hinzuaddiert. Werden insgesamt $z \geq 50$ Punkte erreicht, so ist die Prüfung bestanden. Die Noten verteilen sich wie folgt:

Note	z	Note	z	Note	z	Note
1:			$z \geq 90$	$1,0$	$90 > z \geq 85$	$1,3$
2:	$85 > z \geq 80$	$1,7$	$80 > z \geq 76$	$2,0$	$76 > z \geq 72$	$2,3$
3:	$72 > z \geq 67$	$2,7$	$67 > z \geq 63$	$3,0$	$63 > z \geq 59$	$3,3$
4:	$59 > z \geq 54$	$3,7$	$54 > z \geq 50$	$4,0$		

- Die Ergebnisse der Klausur und Termine zur Klausureinsicht werden spätestens am 1.10.2008 auf der zur Vorlesung gehörigen Internetseite (`www.informatik.uni-frankfurt.de/~tkshp/lehre/WS0708/DM/`) bekanntgegeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Klausur	Bonus	Gesamt
maximale Punkte	8	24	24	17	11	16	100	10	110
erreichte Punkte									

Note:

Aufgabe 1: vollständige Induktion (ca. 9 Minuten) **(8 Punkte)**

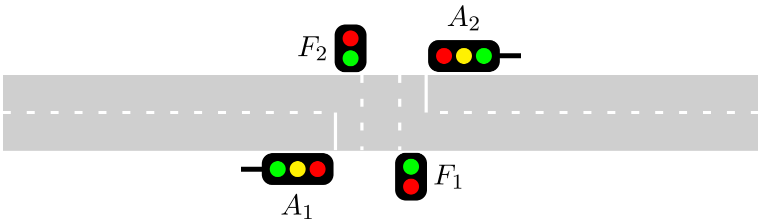
Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (4i - 1) \;=\; 2n^2 + n.$$

Beweis:

Aufgabe 2: Aussagenlogik (ca. 28 Minuten) (24 Punkte)

(a) An einer Straße befinden sich Ampeln für Autos und Fußgänger, d.h. ein Ampelpaar A_1, A_2 für Autos und ein Ampelpaar F_1, F_2 für Fußgänger:



Natürlich zeigen die Ampeln A_1 und A_2 immer die gleichen Farben an. Analog für die Fußgängerampeln F_1 und F_2.

Mit Hilfe der folgenden atomaren Aussagen lassen sich nun einfache Anforderungen an die Ampeln formulieren:

- X_{rot}: Die Ampeln A_1, A_2 zeigen *rot*.
- X_{gelb}: Die Ampeln A_1, A_2 zeigen *gelb*.
- $X_{\text{grün}}$: Die Ampeln A_1, A_2 zeigen *grün*.
- $X_{\text{Fußgänger}}$: Die Fußgängerampeln F_1, F_2 zeigen grün.

Beispielsweise drückt die aussagenlogische Formel $\big((X_{\text{rot}} \land X_{\text{gelb}}) \land \neg X_{\text{grün}}\big)$ aus, dass die Ampeln A_1, A_2 rot und gelb anzeigen, jedoch nicht grün.

Geben Sie aussagenlogische Formeln an, die Folgendes aussagen:

- Falls die Ampeln A_1, A_2 grün oder gelb (oder beides) anzeigen, dann zeigen die Fußgängerampeln F_1, F_2 nicht grün. (2 Pkte)

- Die Ampeln A_1, A_2 zeigen (1) *nur* die Farbe *rot* (d.h. rot, aber nicht gelb und nicht grün), (2) *nur* die Farben *rot und gelb*, (3) *nur* die Farbe *grün* oder (4) *nur* die Farbe *gelb* an. (4 Pkte)

(b) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. (9 Pkte)

Geben Sie außerdem folgendes für jede Formel an: Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel erfüllt. Falls die Formel nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel *nicht* erfüllt.

- $\varphi = (X_1 \wedge (X_2 \rightarrow X_1))$

erfüllbar:	☐ ja	☐ nein
unerfüllbar:	☐ ja	☐ nein
allgemeingültig:	☐ ja	☐ nein

Falls φ erfüllbar ist, geben Sie hier eine zu φ passende Belegung an, die φ erfüllt:

Falls φ nicht allgemeingültig ist, geben Sie hier eine zu φ passende Belegung an, die φ nicht erfüllt:

- $\psi = \Big(\big((X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_1 \wedge \neg X_3) \big) \rightarrow (X_2 \vee X_4) \Big)$

erfüllbar:	☐ ja	☐ nein
unerfüllbar:	☐ ja	☐ nein
allgemeingültig:	☐ ja	☐ nein

Falls ψ erfüllbar ist, geben Sie hier eine zu ψ passende Belegung an, die ψ erfüllt:

Falls ψ nicht allgemeingültig ist, geben Sie hier eine zu ψ passende Belegung an, die ψ nicht erfüllt:

(c) Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch? (3 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche** Kreuz wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

- Eine aussagenlogische Formel φ ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist. ☐ wahr ☐ falsch
- Eine aussagenlogische Formel φ ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist. ☐ wahr ☐ falsch
- Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ allgemeingültig ist. ☐ wahr ☐ falsch

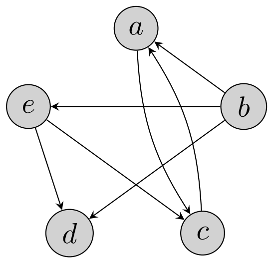
(d) Geben Sie eine zur Formel (6 Pkte)

$$\varphi \ := \ \big((X_1 \vee \neg X_2) \wedge X_3\big)$$

äquivalente aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform an.

Aufgabe 3: Graphen (ca. 28 Minuten) **(24 Punkte)**

(a) Sei $G = (V, E)$ der folgende gerichtete Graph:



(i) Geben Sie die Knotenmenge V und die Kantenmenge E von G an. Repräsentieren Sie G außerdem durch eine Adjazenz*liste*. (3 Pkte)

$V =$

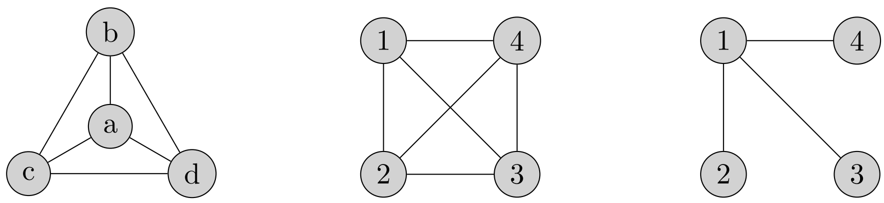
$E =$

Adjazenzliste:

(ii) Wie groß ist der Eingangsgrad des Knotens a in G? (1 Pkt)

(iii) Geben Sie einen Weg vom Knoten e zum Knoten a in G an: (1 Pkt)

(b) Betrachten Sie die folgenden ungerichteten Graphen G_1, G_2, G_3: (8 Pkte)



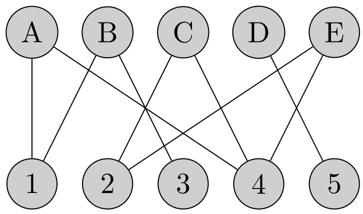
G_1 G_2 G_3

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch?

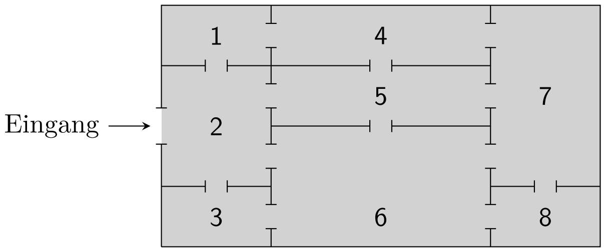
Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie zwei Punkte, für jedes **falsche** Kreuz werden zwei Punkte **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

- G_1 und G_2 sind isomorph. ☐ wahr ☐ falsch
- G_3 ist ein Spannbaum von G_2. ☐ wahr ☐ falsch
- G_3 ist ein induzierter Teilgraph von G_2. ☐ wahr ☐ falsch
- Es gibt eine konfliktfreie Knotenmarkierung von G_1 mit den Elementen aus $\{1, 2, 3\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(c) Geben Sie ein Matching maximaler Größe in dem folgenden Graphen an. (4 Pkte)
Sie müssen keine Begründung dafür angeben, warum Ihr Matching maximal ist.



(d) Ein Reiseleiter plant eine Tour durch ein Museum mit dem folgenden Grundriss:



(i) Modellieren Sie den Grundriss des Museums als einen ungerichteten Graphen. (2 Pkte)

(ii) Gibt es eine Tour durch das Museum, die in Raum 2 startet, in Raum 2 endet und jede Tür (außer der Eingangstür) genau einmal passiert? (5 Pkte)

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 4: Logik erster Stufe (ca. 19 Minuten) (17 Punkte)

(a) Sei $\sigma = \{\dot{D}\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol $\dot{D}$, wobei $\dot{D}(x, y)$ besagt, dass es einen direkten Flug von Stadt x nach Stadt y gibt.

(i) Geben Sie eine Formel φ der Logik erster Stufe über der Signatur σ an, die aussagt, dass für alle Städte x und y, für die es einen direkten Flug von x nach y gibt, auch ein direkter Flug von y nach x existiert. (2 Pkte)

$\varphi =$

(ii) Geben Sie eine Formel $\psi(x, y)$ der Logik erster Stufe über der Signatur σ an, die für zwei gegebene Städte x und y aussagt, dass x und y verschieden sind und man von x nach y mit *höchstens* einer Zwischenlandung fliegen kann. (2 Pkte)

$\psi(x, y) =$

(iii) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was die Formel (3 Pkte)

$$\chi(x) \ := \ \exists y\Big(\ \dot{D}(x, y) \ \wedge \ \forall z\big(\ \dot{D}(z, y) \rightarrow z \doteq x \ \big) \ \Big)$$

aussagt.

(b) Seien φ und ψ Formeln der Logik erster Stufe über einer Signatur σ. Was bedeutet es, dass ψ aus φ folgt? Geben Sie eine exakte Definition an. (3 Pkte)

(c) Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch? (3 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche** Kreuz wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

- $\forall x\, \varphi$ is äquivalent zu $\neg\exists x\, \neg\varphi$. ☐ wahr ☐ falsch
- $\exists x \forall y\, \varphi$ ist äquivalent zu $\forall y \exists x\, \varphi$. ☐ wahr ☐ falsch
- Aus $(\forall x\, \varphi \ \wedge\ \forall x\, \psi)$ folgt $\forall x(\varphi \wedge \psi)$. ☐ wahr ☐ falsch

(d) Sei $\sigma := \{\dot{E}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$. Geben Sie für die Formel (4 Pkte)

$$\varphi \ := \ \exists x_1 \exists x_2 \Big(\ (\dot{E}(x_1, x_2) \wedge \neg x_1 \doteq x_2) \ \wedge \ \forall x_3 (\dot{E}(x_3, x_1) \vee \dot{E}(x_3, x_2)) \ \Big)$$

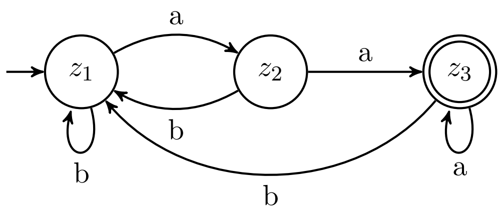
zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ an, so dass $\mathfrak{A}$ die Formel φ erfüllt und $\mathfrak{B}$ die Formel φ *nicht* erfüllt.

$\mathfrak{A} =$

$\mathfrak{B} =$

Aufgabe 5: endliche Automaten, reguläre Ausdrücke (ca. 12 Minuten) (11 Punkte)

(a) Sei A der folgende deterministische endliche Automat: (3 Pkte)



Welche der folgenden Wörter werden von A akzeptiert, welche nicht?

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche** Kreuz wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

Wort	... wird akzeptiert?	
baa	☐ ja	☐ nein
baab	☐ ja	☐ nein
aababaa	☐ ja	☐ nein

(b) Geben Sie die graphische Darstellung eines nicht-deterministischen endlichen Automaten an, der genau diejenigen Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$ akzeptiert, die mit einem Buchstaben enden, der vorher schon in dem Wort vorkam, d.h. alle Wörter der Form $xuyu$, wobei $x, y \in \{a, b\}^*$ und $u \in \{a, b\}$. (4 Pkte)

(c) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der die Sprache aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \ldots, \texttt{z}, \texttt{/}, \texttt{.}\}$ definiert, die die Form (4 Pkte)

$$\texttt{./}\mathit{Name}\texttt{.txt}$$

haben, wobei *Name* ein nicht-leeres Wort ist, in dem weder `/` noch `.` (also nur $\texttt{a}, \texttt{b}, \ldots, \texttt{z}$) vorkommt. Wörter dieser Sprache sind z.B. `./liesmich.txt` und `./a.txt`, aber *nicht* die Wörter `liesmich.txt`, `/liesmich.txt`, `./liesmich` oder `./.txt`.

$R =$

Aufgabe 6: kontextfreie Grammatiken (ca. 19 Minuten) **(16 Punkte)**

(a) Sei $G = (T, N, S, P)$ die kontextfreie Grammatik mit

- der Menge der Terminalsymbole $T = \{a, b, c\}$
- der Menge der Nichtterminalsymbole $N = \{S, X, Y\}$
- dem Startsymbol S
- der Menge der Produktionen $P = \{ \ S \rightarrow XaY, \ X \rightarrow bX, \ X \rightarrow b, \ Y \rightarrow XcX \ \}$

(i) Welche der folgenden Wörter gehören zu der von G erzeugten Sprache $L(G)$, welche nicht? (3 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche** Kreuz wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

	liegt in $L(G)$?	
babbcb	☐ ja	☐ nein
babbc	☐ ja	☐ nein
babb	☐ ja	☐ nein

(ii) Geben Sie einen Ableitungsbaum für das Wort *bbabcb* an: (3 Pkte)

(iii) Geben Sie eine (mathematische oder umgangssprachliche) Beschreibung der Sprache $L(G)$, die von der oben angegebenen Grammatik G erzeugt wird, an. (3 Pkte)

(b) Die Menge BA der *Booleschen Ausdrücke* ist die Menge der Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, (,)\}$, die rekursiv wie folgt definiert ist:

Basisregeln: (B) Die Symbole 0 und 1 sind in BA.

Rekursive Regeln: (R1) Ist $b \in \mathsf{BA}$, so ist auch $\neg b$ in BA.

(R2) Sind b_1 und b_2 in BA, so sind auch $(b_1 \wedge b_2)$ und $(b_1 \vee b_2)$ in BA.

(i) Welche der folgenden Wörter gehören zur Sprache BA, welche nicht? (3 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche** Kreuz wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

Wort	... liegt in BA?	
$(1 \wedge \neg 0) \vee 0$	☐ ja	☐ nein
$(0 \vee \neg(\neg 1 \vee 0))$	☐ ja	☐ nein
$(\neg\neg 1 \wedge 0)$	☐ ja	☐ nein

(ii) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_{BA} an, die genau die Sprache BA erzeugt. (4 Pkte)