Diskrete Modellierung

Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 21. Januar 2009, 8.15 Uhr vor der Vorlesung*
(oder bis 21. Januar 2009, 8.15 Uhr in Raum 113, Robert-Mayer-Str. 11–15)

Aufgabe 1: **(12 + 12 = 24 Punkte)**

Sei $\sigma := \{\dot{E}, \dot{I}, \dot{K}, \dot{M}\}$, wobei $\dot{E}$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist und $\dot{I}$, $\dot{K}$, $\dot{M}$ jeweils 1-stellige Relationssymbole sind. Wir betrachten eine σ-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}}, \dot{I}^{\mathfrak{A}}, \dot{K}^{\mathfrak{A}}, \dot{M}^{\mathfrak{A}})$, in der A eine Menge von Personen ist und für alle Personen x und y aus A gilt:

- $(x, y) \in \dot{E}^{\mathfrak{A}}$ genau dann, wenn x und y befreundet sind.
- $x \in \dot{I}^{\mathfrak{A}}$ genau dann, wenn x Informatik studiert.
- $x \in \dot{K}^{\mathfrak{A}}$ genau dann, wenn x kognitive Linguistik studiert.
- $x \in \dot{M}^{\mathfrak{A}}$ genau dann, wenn x Mathematik studiert.

Insbesondere ist $(A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ also ein gerichteter Graph, der keine Schleifen besitzt und in dem die Kantenrelation $\dot{E}^{\mathfrak{A}}$ symmetrisch ist.

(a) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden FO[σ]-Sätze in $\mathfrak{A}$ aussagt:

- **(i)** $\exists x\, (\dot{I}(x) \wedge \dot{M}(x))$
- **(ii)** $\forall x \exists y\, \dot{E}(x, y)$
- **(iii)** $\exists x \forall y \big((x \doteq y \vee \dot{E}(x, y)) \vee \exists z (\dot{E}(x, z) \wedge \dot{E}(z, y)) \big)$

(b) Geben Sie je einen FO[σ]-Satz an, der in $\mathfrak{A}$ Folgendes aussagt:

- **(i)** Es gibt eine Person, die keines der Fächer Informatik, kognitive Linguistik, Mathematik studiert.
- **(ii)** Jede Person ist mit mindestens zwei anderen Personen befreundet.
- **(iii)** Es gibt keine Person, die mit allen anderen Personen befreundet ist.

Aufgabe 2: **(16 + 12 = 28 Punkte)**

Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathfrak{A}_{\text{Kino}}$ aus der Vorlesung.

(a) Berechnen Sie für jede der folgenden Formeln φ_i die Relation $\varphi_i(\mathfrak{A}_{\text{Kino}})$ und geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfrage durch die Formel φ_i beschrieben wird:

$$\varphi_1(x_{\text{K}}) = \exists x_{\text{Z}}\, \dot{Programm}(x_{\text{K}}, \text{'}\dot{Capote}\text{'}, x_{\text{Z}})$$

$$\varphi_2(x_{\text{S}}) = \exists x_{\text{T}} \Big(\exists x_{\text{R}}\, \dot{Filme}(x_{\text{T}}, x_{\text{R}}, x_{\text{S}}) \;\wedge\; \exists x_{\text{K}} \exists x_{\text{Z}}\, \dot{Programm}(x_{\text{K}}, x_{\text{T}}, x_{\text{Z}}) \Big)$$

$$\varphi_3(x_{\text{T}}) = \exists x_{\text{K}} \exists x_{\text{Z}} \Big(\dot{Programm}(x_{\text{K}}, x_{\text{T}}, x_{\text{Z}}) \;\wedge\; \forall y_{\text{K}} \forall y_{\text{Z}} \big(\dot{Programm}(y_{\text{K}}, x_{\text{T}}, y_{\text{Z}}) \rightarrow y_{\text{Z}} \doteq x_{\text{Z}} \big) \Big)$$

$$\varphi_4(x_{\text{T}}, x_{\text{K}}, x_{\text{A}}) = \Big(\exists x_{\text{Z}}\, \exists x_{\text{Tel}} \big(\dot{Programm}(x_{\text{K}}, x_{\text{T}}, x_{\text{Z}}) \wedge \dot{Orte}(x_{\text{K}}, x_{\text{A}}, x_{\text{Tel}}) \big) \;\wedge\; \exists x_{\text{S}}\, \dot{Filme}(x_{\text{T}}, \text{'}\dot{George\ Clooney}\text{'}, x_{\text{S}}) \Big)$$

(b) Finden Sie Formeln der Logik erster Stufe, die die folgenden Anfragen beschreiben:

- **(i)** Gib die Titel aller Filme aus, die in mindestens zwei Kinos laufen.
- **(ii)** Gib die Titel aller Filme aus, in denen George Clooney mitspielt, aber nicht selbst Regie führt.

Beachten Sie: Es kann sein, dass ein Film mehr als einen Regisseur hat, z.B. Raumpatrouille Orion - Rücksturz ins Kino.

(iii) Gib die Titel aller Filme aus, deren Schauspieler schon mal in einem Film von Stephen Spielberg mitgespielt haben.

Aufgabe 3: **(24 Punkte)**

Es sei $\sigma_{\text{Ar}} := \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{0}, \dot{1}\}$ eine Signatur mit 2-stelligen Funktionssymbolen $\dot{+}$, $\dot{\times}$ und Konstantensymbolen $\dot{0}$, $\dot{1}$. Betrachten Sie die folgenden σ_{Ar}-Strukturen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{Z}$ aus der Vorlesung:

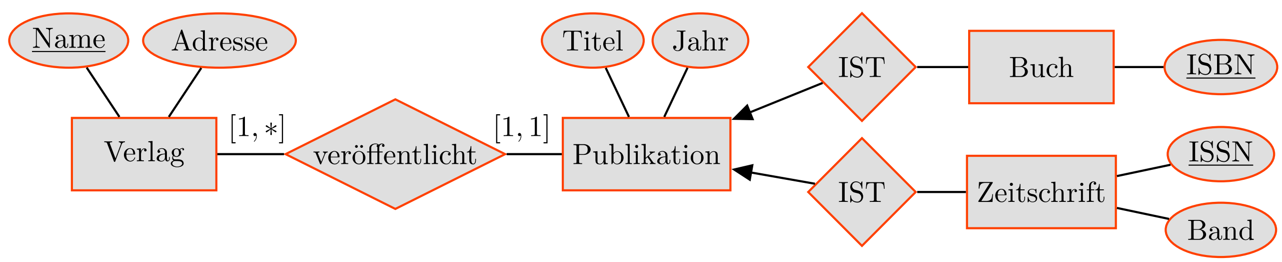
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \dot{+}^{\mathcal{N}}, \dot{\times}^{\mathcal{N}}, \dot{0}^{\mathcal{N}}, \dot{1}^{\mathcal{N}})$, wobei $\dot{+}^{\mathcal{N}}$ und $\dot{\times}^{\mathcal{N}}$ die natürliche Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind und $\dot{0}^{\mathcal{N}} := 0$ und $\dot{1}^{\mathcal{N}} := 1$.
- $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, \dot{+}^{\mathcal{Z}}, \dot{\times}^{\mathcal{Z}}, \dot{0}^{\mathcal{Z}}, \dot{1}^{\mathcal{Z}})$, wobei $\dot{+}^{\mathcal{Z}}$ und $\dot{\times}^{\mathcal{Z}}$ die natürliche Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ sind und $\dot{0}^{\mathcal{Z}} := 0$ und $\dot{1}^{\mathcal{Z}} := 1$.

Geben Sie einen FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Satz φ an, so dass $\mathcal{Z} \models \varphi$ und $\mathcal{N} \not\models \varphi$.

Hinweis: Es genügt, den Satz anzugeben und umgangssprachlich zu beschreiben, was er aussagt und warum er von $\mathcal{Z}$ erfüllt wird, von $\mathcal{N}$ aber nicht.

Aufgabe 4: **($12 + 12 = 24$ Punkte)**

Es sei folgendes Entity-Relationship-Modell gegeben:



Weiterhin seien die folgenden konkreten Ausprägungen der einzelnen Entity-Typen Buch, Zeitschrift, Publikation und Verlag gegeben: Buch $= \{B1, B2\}$, Zeitschrift $= \{Z\}$, Publikation $=$ Buch $\cup$ Zeitschrift und Verlag $= \{V1, V2\}$, wobei:

- $B1$: Titel: „Das ist o.B.d.A. trivial“, Jahr: 2002, ISBN: 3-528-56442-3
- $B2$: Titel: „Diskrete Mathematik“, Jahr: 2004, ISBN: 3-528-47268-5
- Z: Titel: „Journal of the ACM“, Jahr: 2008, Band: 55, ISSN: 0004-5411
- $V1$: Name: Vieweg, Adresse: Abraham-Lincoln-Straße 46, 65189 Wiesbaden
- $V2$: Name: ACM, Adresse: 2 Penn Plaza, Suite 701, New York, NY 10121-0701

(a) Welche der folgenden Relationen sind zulässige Ausprägungen des Relationen-Typs „veröffentlicht“?

(i) $\{(V1, B1), (V1, B2), (V1, Z)\}$

(ii) $\{(V1, B1), (V1, B2)\}$

(iii) $\{(V1, B1), (V1, B2), (V2, Z)\}$

(iv) $\{(V1, B1), (V1, B2), (V2, B2), (V2, Z)\}$

(b) Würde es dem ER-Modell widersprechen, wenn

(i) $V1$ und $V2$ den gleichen Namen hätten?

(ii) $B1$ und $B2$ den gleichen Titel hätten?

(iii) $B1$ ein Entity vom Typ Publikation, aber nicht vom Typ Buch wäre?

(iv) $B1$ ein Entity vom Typ Buch, aber nicht vom Typ Publikation wäre?

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten!