Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

17. Dezember 2008

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 9 (Beispielklausur)

Abgabe: *bis 14. Januar 2009, 8.^{15} Uhr vor der Vorlesung*
(oder bis 14. Januar 2009, 8.^{15} Uhr in Raum 113, Robert-Mayer-Str. 11–15)

Achtung: *Dieses Übungsblatt stellt lediglich ein* Beispiel *für eine mögliche Klausur dar (insbesondere bezüglich Umfang und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben). Die Klausur am 3.3.09 kann auch eine andere Gewichtung der in der Vorlesung behandelten Themen beinhalten, insbesondere auch Themen aus den noch verbleibenden Vorlesungsstunden.*

Wenn in der Aufgabenstellung nicht explizit eine Begründung verlangt ist, dann brauchen Sie keine Begründung angeben.

Aufgabe 1: Induktion (3 + 8 = 11 Punkte)

Die Menge BA^+ der *positiven Booleschen Ausdrücke* ist die Menge der Wörter über dem Alphabet $A = \{0, 1, \wedge, \vee, (,)\}$, die rekursiv wie folgt definiert ist:

Basisregel: (B) Die Symbole 0 und 1 sind in BA^+.

Rekursive Regeln: (R1) Sind w_1 und w_2 in BA^+, so ist auch $(w_1 \wedge w_2)$ in BA^+.
(R2) Sind w_1 und w_2 in BA^+, so ist auch $(w_1 \vee w_2)$ in BA^+.

(a) Welche der folgenden Wörter gehören zur Sprache BA^+, welche nicht?
Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede **falsche** Antwort wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

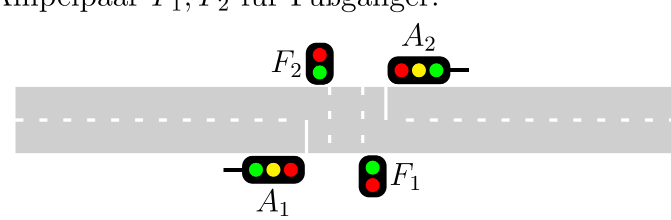
(i) $(1 \wedge 0)$
(ii) $(1 \wedge 0) \vee 0$
(iii) $(0 \vee ((1 \wedge 0) \wedge 0))$

(b) Für jedes Wort $w \in A^*$ bezeichne $a(w)$ die Anzahl der Vorkommen der Symbole 0 und 1 in w und $b(w)$ die Anzahl der Vorkommen der Symbole $\wedge$ und $\vee$ in w. Zum Beispiel gilt für das Wort $w = (0 \vee ((1 \wedge 0) \wedge 0))$: $a(w) = 4$ und $b(w) = 3$.

Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle Wörter $w \in \mathsf{BA}^+$ gilt: $a(w) = b(w) + 1$.

Aufgabe 2: Aussagenlogik (6 + 9 + 3 + 6 = 24 Punkte)

(a) An einer Straße befinden sich Ampeln für Autos und Fußgänger, d.h. ein Ampelpaar A_1, A_2 für Autos und ein Ampelpaar F_1, F_2 für Fußgänger:



Natürlich zeigen die Ampeln A_1 und A_2 immer die gleichen Farben an. Analog für die Fußgängerampeln F_1 und F_2.

Mit Hilfe der folgenden atomaren Aussagen lassen sich nun einfache Anforderungen an die Ampeln formulieren:

- X_{rot}: Die Ampeln A_1, A_2 zeigen *rot*.
- X_{gelb}: Die Ampeln A_1, A_2 zeigen *gelb*.
- $X_{\text{grün}}$: Die Ampeln A_1, A_2 zeigen *grün*.
- $X_{\text{Fußgänger}}$: Die Fußgängerampeln F_1, F_2 zeigen grün.

Beispielsweise drückt die aussagenlogische Formel $\big((X_{\text{rot}} \wedge X_{\text{gelb}}) \wedge \neg X_{\text{grün}}\big)$ aus, dass die Ampeln A_1, A_2 rot und gelb anzeigen, jedoch nicht grün.

Geben Sie aussagenlogische Formeln an, die Folgendes aussagen:

(i) Falls die Ampeln A_1, A_2 grün oder gelb (oder beides) anzeigen, dann zeigen die Fußgängerampeln F_1, F_2 nicht grün.

(ii) Die Ampeln A_1, A_2 zeigen (1) *nur* die Farbe *rot* (d.h. rot, aber nicht gelb und nicht grün), (2) *nur* die Farben *rot und gelb*, (3) *nur* die Farbe *grün* oder (4) *nur* die Farbe *gelb* an.

(b) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie außerdem folgendes für jede Formel an: Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel erfüllt. Falls die Formel nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel *nicht* erfüllt.

(i) $\varphi = \big(X_1 \wedge (X_2 \rightarrow X_1)\big)$

(ii) $\psi = \Big(\big((X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_1 \wedge \neg X_3) \big) \rightarrow (X_2 \vee X_4) \Big)$

(c) Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch?

Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede **falsche** Antwort wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

(i) Eine aussagenlogische Formel φ ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.

(ii) Eine aussagenlogische Formel φ ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.

(iii) Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ allgemeingültig ist.

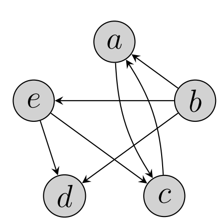
(d) Geben Sie eine zur Formel

$$\varphi := \big((X_1 \vee \neg X_2) \wedge X_3\big)$$

äquivalente aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform an.

Aufgabe 3: Graphen (5 + 8 + 4 + 7 = 24 Punkte)

(a) Sei $G = (V, E)$ der folgende gerichtete Graph:

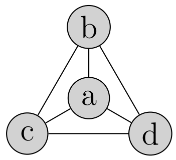


(i) Geben Sie die Knotenmenge V und die Kantenmenge E von G an. Repräsentieren Sie G außerdem durch eine Adjazenz*liste*.

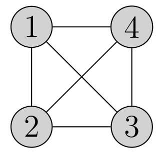
(ii) Wie groß ist der Eingangsgrad des Knotens a in G?

(iii) Geben Sie einen Weg vom Knoten e zum Knoten a in G an.

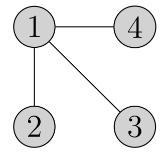
(b) Betrachten Sie die folgenden ungerichteten Graphen G_1, G_2, G_3:



G_1



G_2



G_3

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch?

Für jede richtige Antwort bekommen Sie zwei Punkte, für jede **falsche** Antwort werden zwei Punkte **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

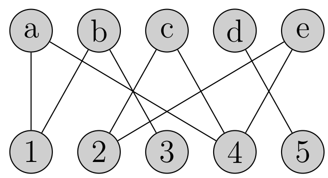
(i) G_1 und G_2 sind isomorph.

(ii) G_3 ist ein Spannbaum von G_2.

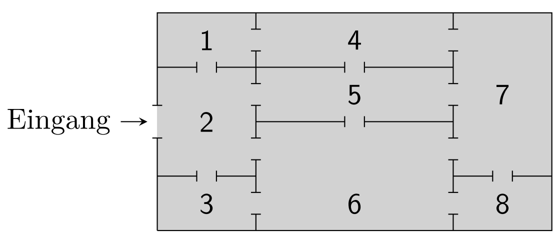
(iii) G_3 ist ein induzierter Teilgraph von G_2.

(iv) Es gibt eine konfliktfreie Knotenmarkierung von G_1 mit den Elementen aus $\{1, 2, 3\}$.

(c) Geben Sie ein Matching maximaler Größe in dem folgenden Graphen an.



(d) Ein Reiseleiter plant eine Tour durch ein Museum mit dem folgenden Grundriss:



(i) Modellieren Sie den Grundriss des Museums als einen ungerichteten Graphen.

(ii) Gibt es eine Tour durch das Museum, die in Raum 2 startet, in Raum 2 endet und jede Tür (außer der Eingangstür) genau einmal passiert? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 4: Logik erster Stufe (Teil 1) $\quad$ ($7 + 3 + 4 = 14$ Punkte)

(a) Sei $\sigma = \{\dot{D}\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol $\dot{D}$, wobei $\dot{D}(x, y)$ besagt, dass es einen direkten Flug von Stadt x nach Stadt y gibt.

(i) Geben Sie eine Formel φ der Logik erster Stufe über der Signatur σ an, die aussagt, dass für alle Städte x und y, für die es einen direkten Flug von x nach y gibt, auch ein direkter Flug von y nach x existiert.

(ii) Geben Sie eine Formel $\psi(x, y)$ der Logik erster Stufe über der Signatur σ an, die für zwei gegebene Städte x und y aussagt, dass x und y verschieden sind und man von x nach y mit *höchstens* einer Zwischenlandung fliegen kann.

(iii) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was die Formel

$$\chi(x) \ := \ \exists y\Big(\ \dot{D}(x,y) \ \wedge \ \forall z\big(\ \dot{D}(z,y) \to z \dot{=} x \ \big) \ \Big)$$

aussagt.

(b) Seien φ und ψ Formeln der Logik erster Stufe über einer Signatur σ. Was bedeutet es, dass ψ aus φ folgt? Geben Sie eine exakte Definition an.

(c) Sei $\sigma := \{\dot{E}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$. Geben Sie für die Formel

$$\varphi \ := \ \exists x_1 \exists x_2 \Big(\ \big(\dot{E}(x_1,x_2) \wedge \neg x_1 \dot{=} x_2 \big) \ \wedge \ \forall x_3 \big(\dot{E}(x_3,x_1) \vee \dot{E}(x_3,x_2) \big) \ \Big)$$

zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ an, so dass $\mathfrak{A}$ die Formel φ erfüllt und $\mathfrak{B}$ die Formel φ *nicht* erfüllt.

Aufgabe 5: Logik erster Stufe (Teil 2) (6 + 8 = 14 Punkte)

(a) Welche der folgenden Aussagen stimmen, welche stimmen nicht?

Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede **falsche** Antwort wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

(i) $\forall x\, \varphi \ \equiv \ \neg \exists x\, \neg \varphi$

(ii) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \ \models \ \big(\exists x\, \varphi \ \wedge \ \exists x\, \psi \big)$

(iii) $\big(\exists x\, \varphi \ \wedge \ \exists x\, \psi \big) \ \models \ \exists x(\varphi \wedge \psi)$

(iv) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \ \equiv \ \big(\exists x\, \varphi \ \wedge \ \exists x\, \psi \big)$

(v) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \ \equiv \ \big(\forall x\, \varphi \ \wedge \ \forall x\, \psi \big)$

(vi) $\forall x\, \varphi \ \models \ \exists x\, \varphi$

(b) Beweisen Sie, dass Ihre Antworten zu (ii) und (iii) aus (a) korrekt sind.

Aufgabe 6: Logik erster Stufe (Teil 3) (6 + 7 = 13 Punkte)

Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathfrak{A}_{\text{Kino}}$ aus der Vorlesung.

(a) Berechnen Sie für jede der folgenden Formeln φ_i die Relation $\varphi_i(\mathfrak{A}_{\text{Kino}})$ und geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfrage durch die Formel φ_i beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_{\text{K}}) \ &= \ \exists x_{\text{Z}}\, \dot{Programm}(x_{\text{K}}, \text{‘}\dot{\text{Capote}}\text{’}, x_{\text{Z}}) \\
\varphi_2(x_{\text{T}}) \ &= \ \exists x_{\text{K}} \exists x_{\text{Z}} \Big(\ \dot{Programm}(x_{\text{K}}, x_{\text{T}}, x_{\text{Z}}) \ \wedge \\
&\qquad\qquad \forall y_{\text{K}} \forall y_{\text{Z}} \big(\dot{Programm}(y_{\text{K}}, x_{\text{T}}, y_{\text{Z}}) \to y_{\text{Z}} \dot{=} x_{\text{Z}} \big) \ \Big)
\end{aligned}$$

(b) Finden Sie Formeln der Logik erster Stufe, die die folgenden Anfragen beschreiben:

(i) Gib die Titel aller Filme aus, die in mindestens zwei Kinos laufen.

(ii) Gib die Titel aller Filme aus, in denen George Clooney mitspielt, aber nicht selbst Regie führt.

Beachten Sie: Es kann sein, dass ein Film mehr als einen Regisseur hat.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!