Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

10. Dezember 2008

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 8

Abgabe: *17. Dezember 2008, 8.15 Uhr vor der Vorlesung*
(oder bis 17. Dezember 2008, 8.15 Uhr in Raum 113, Robert-Mayer-Str. 11–15)

Aufgabe 1: **(12 + 12 = 24 Punkte)**

Sei $B = (V, E)$ ein gerichteter Baum.

(a) Zeigen Sie, dass die Relation

$$R_B \ := \ \{(x, y) \in V^2 : \text{es gibt in } B \text{ einen Weg von } x \text{ nach } y\}$$

eine partielle Ordnung ist. Geben Sie außerdem einen gerichteten Baum B an, so dass R_B *keine* lineare Ordnung ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Relation

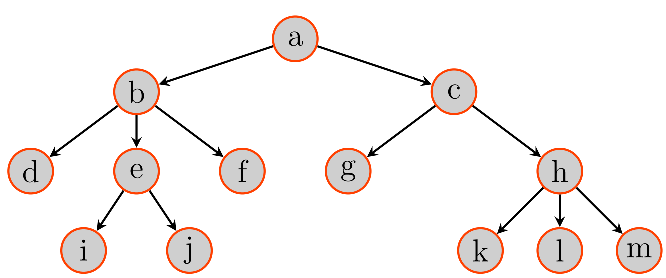
$$R'_B \ := \ \{(x, y) \in V^2 : \text{es gibt eine Zahl } l \in \mathbb{N}, \text{ s.d. für jeden Knoten } z \in \{x, y\} \text{ gilt:} \\ \text{in } B \text{ gibt es einen Weg der Länge } l \text{ von der Wurzel nach } z\}$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2: **(15 + 10 = 25 Punkte)**

In dieser Aufgabe sollen gerichtete Bäume durch Strukturen über einer Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{\textit{Elternknoten}}$ repräsentiert werden.

(a) Beschreiben Sie, wie ein gegebener gerichteter Baum $B = (V, E)$ durch eine Struktur über der Signatur $\{\dot{\textit{Elternknoten}}\}$ modelliert werden kann. Geben Sie die entsprechende Struktur für den folgenden Baum an:



(b) Geben Sie je eine Formel $\varphi(x)$ der Logik erster Stufe an, die ausdrückt, dass der Knoten x

- **(i)** ein Blatt ist,
- **(ii)** die Wurzel ist,
- **(iii)** mindestens zwei Kinder hat.

Aufgabe 3: **(18 + 8 = 26 Punkte)**

Sei $\sigma := \{\dot{f}, \dot{R}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$, einem 3-stelligen Relationssymbol $\dot{R}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$.

(a) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Wörter, ob es ein σ-Term (gemäß Definition 5.13) oder eine FO[σ]-Formel (gemäß Definition 5.15) ist. Falls das Wort eine FO[σ]-Formel ist, geben Sie auch an, ob es sich bei dem Wort um eine atomare σ-Formel handelt.

- **(i)** $\dot{R}\big(\dot{c}, \dot{f}(v_2, v_5), v_1\big)$
- **(ii)** $\big(\dot{R}(\dot{c}, v_1, v_2) \leftrightarrow \dot{f}(v_7, v_5)\big)$
- **(iii)** $\dot{f}\big(\dot{c}, \dot{R}(v_4, v_1, v_7)\big) \doteq \dot{f}(v_0, \dot{c})$
- **(iv)** $\dot{f}\big(\dot{c}, \dot{f}(\dot{c}, v_0)\big) \doteq \dot{f}(\dot{c}, v_0)$
- **(v)** $\forall v_1 \exists v_2 \big(\dot{f}(v_1, \dot{c}) \doteq v_2 \wedge \forall v_2\, \dot{R}(\dot{f}(v_1, \dot{c}), v_2, v_6)\big)$
- **(vi)** $\exists v_0 \forall v_1\, \dot{f}(v_1, v_0) \doteq v_1$

(b) Betrachten Sie die zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{R}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \dot{f}^{\mathfrak{B}}, \dot{R}^{\mathfrak{B}}, \dot{c}^{\mathfrak{B}})$, wobei

- $A := \{0, 1, 2, 3\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{A}} := \{(0, 1, 1), (2, 1, 3)\}$, $\dot{c}^{\mathfrak{A}} := 2$
- $B := \{a, b, c, d\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{B}} := \{(a, b, c), (d, b, b)\}$, $\dot{c}^{\mathfrak{B}} := a$

und die Funktionen $\dot{f}^{\mathfrak{A}} \colon A^2 \to A$ und $\dot{f}^{\mathfrak{B}} \colon B^2 \to B$ definiert sind durch

$\dot{f}^{\mathfrak{A}}$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\dot{f}^{\mathfrak{B}}$	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	a	d	b
c	b	d	a	c
d	a	b	c	d

Zum Beispiel gilt $\dot{f}^{\mathfrak{A}}(2, 0) = 2$, $\dot{f}^{\mathfrak{A}}(2, 1) = 3$ und $\dot{f}^{\mathfrak{B}}(b, a) = c$.

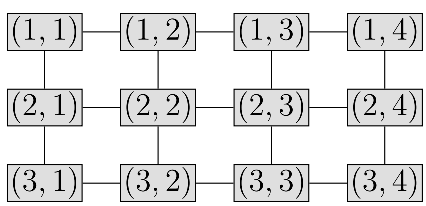
Überprüfen Sie, ob $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ an. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gibt.

Aufgabe 4: (6 + 6 + 6 + 7 = 25 Punkte)

Für $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei das $m \times n$-*Gitter* der Graph $G_{m\times n} = (V_{m\times n}, E_{m\times n})$ mit

$$\begin{aligned} V_{m\times n} &:= \Big\{ (i,j) \,:\, 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \Big\}, \\ E_{m\times n} &:= \Big\{ \{(i,j),(i,j+1)\} \,:\, 1 \le i \le m,\ 1 \le j < n \Big\} \cup \\ &\ \Big\{ \{(i,j),(i+1,j)\} \,:\, 1 \le i < m,\ 1 \le j \le n \Big\}. \end{aligned}$$

Das 3×4-Gitter $G_{3\times 4}$ sieht z.B. wie folgt aus:



(a) Überprüfen Sie, ob $G_{3\times 4}$ bipartit ist. Falls $G_{3\times 4}$ bipartit ist, so geben Sie zwei disjunkte Knotenmengen $V_1, V_2 \subseteq V_{3\times 4}$ mit $V_1 \cup V_2 = V_{3\times 4}$ an, so dass jede Kante aus $E_{3\times 4}$ einen Knoten aus V_1 und einen Knoten aus V_2 miteinander verbindet. Falls $G_{3\times 4}$ nicht bipartit ist, so begründen Sie dies.

(b) Geben Sie ein Matching maximaler Größe in $G_{3\times 4}$ an.

(c) Geben Sie einen Hamilton-Kreis in $G_{3\times 4}$ an.

(d) Für welche $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ besitzt $G_{m\times n}$ einen Hamilton-Kreis, für welche nicht?

Hinweis: Verallgemeinern Sie die Argumentation auf Seite 136 (oben) im Buch „Modellierung – Grundlagen und formale Methoden“ von Uwe Kastens und Hans Kleine Büning. Das Buch befindet sich unter Anderem im Semesterapparat zur Vorlesung in der Informatik-Bibliothek.