Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

3. Dezember 2008

Diskrete Modellierung

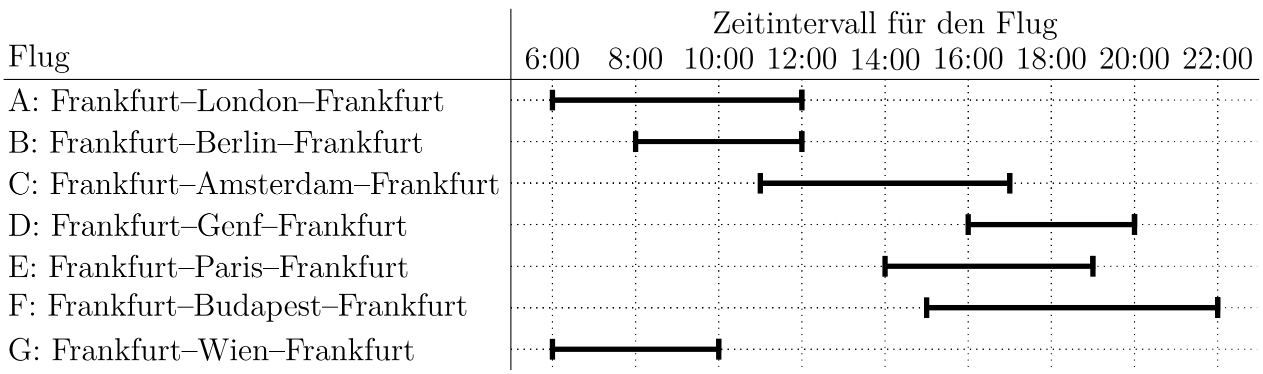
Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 10. Dezember 2008, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(9 + 7 + 9 = 25 Punkte)**

Die kleine Frankfurter Fluggesellschaft Air-Flight hat für den kommenden Freitag 7 Flüge geplant, die wir im Folgenden mit den Buchstaben A–G bezeichnen. Für jeden Flug ist ein Zeitintervall (Abflugzeit bis Ankunftszeit) vorgesehen, in dem der Flug stattfinden soll:



Nun muss jedem Flug eines von fünf Flugzeugen F1–F5 zugeordnet werden, das für den Flug eingesetzt wird. Natürlich dürfen zwei Flüge, die zueinander in Konflikt stehen (d.h. bei denen sich die Zeitintervalle überlappen), nicht dem selben Flugzeug zugeordnet werden.

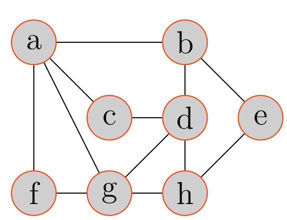
(a) Stellen Sie den Konfliktgraphen auf.

(b) Weisen Sie jedem der Flüge A–G genau eines der Flugzeuge F1–F5 zu, so dass Flüge, die zueinander in Konflikt stehen, nicht dem selben Flugzeug zugeordnet sind.

(c) Wie viele Flugzeuge werden für die Flüge A–G mindestens benötigt?

Aufgabe 2: **(12 + 13 = 25 Punkte)**

(a) Geben Sie in dem folgenden Graph einen Spannbaum an, den man so wurzeln kann, dass er die Höhe 2 hat. Kennzeichnen Sie die Wurzel und die Blätter in Ihrer Lösung.



(b) Beweisen Sie, dass jeder ungerichtete, zusammenhängende Graph $G = (V, E)$, dessen Knotenmenge V endlich ist, einen Spannbaum besitzt.

Hinweis: Induktion nach $n := |E|$.

Aufgabe 3: **($12 + 8 = 20$ Punkte)**

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ seien 2^n Münzen gegeben, die wir im Folgenden mit $M_1, \ldots, M_{2^n}$ bezeichnen. Genau eine der Münzen unterscheidet sich im Gewicht von allen anderen Münzen. Diese Münze lässt sich mit Hilfe einer Balkenwaage wie folgt finden:

(i) Falls $n = 0$ ist, d.h. nur eine Münze vorhanden ist, dann ist die gesuchte Münze natürlich die Münze M_1.

(ii) Sonst vergleiche das Gesamtgewicht der Münzen aus der Menge $A := \{M_1, \ldots, M_{2^{n-1}}\}$ mit dem Gesamtgewicht der Münzen aus der Menge $B := \{M_{2^{n-1}+1}, \ldots, M_{2^n}\}$.

(iii) Falls das Gesamtgewicht der Münzen aus A größer als das Gesamtgewicht der Münzen aus B ist, dann muss sich die gesuchte Münze in A befinden. Die gesuchte Münze lässt sich in diesem Fall finden, indem man das Verfahren rekursiv auf die Münzen $M_1, \ldots, M_{2^{n-1}}$ anwendet. Andernfalls muss sich die gesuchte Münze in B befinden, und die gesuchte Münze lässt sich finden, indem man das Verfahren rekursiv auf die Münzen $M_{2^{n-1}+1}, \ldots, M_{2^n}$ anwendet.

(a) Beschreiben Sie das Verfahren für $n = 2$ durch einen Entscheidungsbaum.

(b) Wie viele Wiegevorgänge müssen im oben beschriebenen Verfahren insgesamt durchgeführt werden, um die gesuchte Münze unter 2^n gegebenen Münzen zu finden?

Aufgabe 4: **($6 + 10 + 7 + 7 = 30$ Punkte)**

(a) Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie drei zweistellige Relationen R_1, R_2, R_3 über A an, so dass

  (i) R_1 reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv ist.

  (ii) R_2 reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch ist.

  (iii) R_3 symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist.

(b) Sei A eine Menge mit $|A| \geq 2$. Überprüfen Sie für jede der folgenden zweistelligen Relationen über A^*, ob sie reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, konnex bzw. transitiv ist.

  (i) $R_4 \;:=\; \{(x, y) \in A^* \times A^* : |x| \leq |y|\}$

  (ii) $R_5 \;:=\; \{(x, y) \in A^* \times A^* : \text{ex. } z \in A^* \text{ s.d. } xz = y\}$

(c) Sei $\mathcal{G}$ die Menge der ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V \subseteq \mathbb{N}$. Überprüfen Sie, ob die Relation

$$R_6 \;:=\; \{\, (G, G') \in \mathcal{G}^2 \;:\; G' \text{ besitzt einen Teilgraph } G'' \text{ mit } G'' \cong G \,\}$$

reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, konnex bzw. transitiv ist.

(d) Für jeden gerichteten Baum $B = (V, E)$ definieren wir die zweistellige Relation

$$R_B \;:=\; \{(x, y) \in V^2 : \text{es gibt in } B \text{ einen Weg von } x \text{ nach } y\}.$$

  (i) Zeigen Sie, dass R_B für jeden gerichteten Baum B eine partielle Ordnung ist.

  (ii) Geben Sie einen gerichteten Baum B an, so dass R_B *keine* lineare Ordnung ist.