

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2008/2009

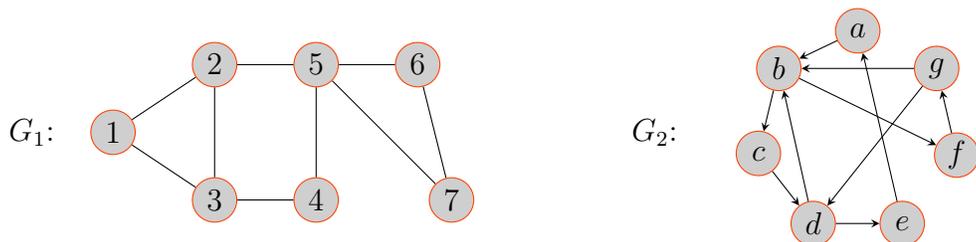
Übungsblatt 6

Abgabe: bis 3. Dezember 2008, 8.¹⁵ Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)

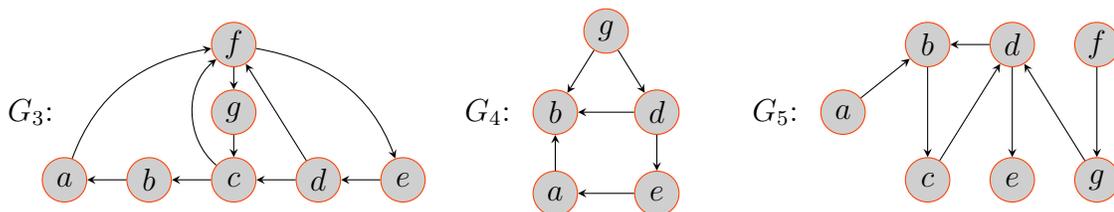
Aufgabe 1:

(8 + 4 + 3 + 10 = 25 Punkte)

Es seien die folgenden beiden Graphen G_1 und G_2 gegeben:



- (a) Geben Sie für jeden der beiden Graphen G_1 und G_2 die Knotenmenge und die Kantenmenge an. Repräsentieren Sie außerdem jeden der beiden Graphen durch eine Adjazenzmatrix und eine Adjazenzliste.
- (b) Geben Sie einen Weg von 2 nach 4 in G_1 an, der *nicht* einfach ist. Geben Sie außerdem einen Kreis in G_1 an, der *nicht* einfach ist und durch den Knoten 2 verläuft.
- (c) Ist G_1 zusammenhängend? Ist G_2 stark zusammenhängend? Ist G_2 azyklisch?
- (d) Überprüfen Sie für jeden der folgenden Graphen G , ob folgendes gilt: (i) $G = G_2$, (ii) G ist ein Teilgraph von G_2 , (iii) G ist ein induzierter Teilgraph von G_2 , (iv) G ist isomorph zu G_2 . Geben Sie bei (d) auch einen Isomorphismus von G nach G_2 an, falls dieser existiert.



Aufgabe 2:

(13 + 8 + 4 = 25 Punkte)

Auf dem Weihnachtsmarkt von Großdorf sollen insgesamt 8 Stände rund um den Marktplatz arrangiert werden. Die 8 Stände setzen sich folgendermaßen zusammen:

- Ein Stand, in dem die traditionelle Weihnachtskrippe aufgebaut ist.
- Zwei Stände, an denen Kunsthandwerk verkauft wird: einer der beiden Stände ist die Töpferei, der andere bietet Holzschmuck aus dem Erzgebirge an.

- Zwei Glühweinstände; einer davon wird von Herrn Max, der andere von Frau Peters betrieben.
- Drei Essensstände; einer davon verkauft Crêpes, der andere Waffeln und der dritte Steaks vom Holzkohlegrill.

Bei der Platzierung der 8 Stände um den Marktplatz ist folgendes zu beachten: Neben der Weihnachtskrippe darf keiner der Glühweinstände platziert werden. Essensstände dürfen nicht nebeneinander stehen, die beiden Glühweinstände dürfen nicht nebeneinander stehen, und die beiden Kunsthandwerkstände dürfen nicht nebeneinander stehen. Aus Sicherheitsgründen darf der Holzkohlegrill weder neben der Weihnachtskrippe noch neben dem Stand mit dem Holzschmuck aus dem Erzgebirge stehen. Herr Max ist mit den Besitzern des Holzkohlegrills und der Töpferei befreundet und möchte daher unbedingt die beiden als Nachbarn haben. Außerdem ist zu beachten, dass sich der Betreiber des Waffelstands weder mit Frau Peters noch mit dem Besitzer der Töpferei verträgt und daher auf keinen Fall neben einem der beiden platziert werden will.

- Stellen Sie den Konfliktgraphen und das Komplement des Konfliktgraphen auf.
- Gibt es im Komplement des Konfliktgraphen einen Hamiltonkreis? Falls ja, dann geben Sie einen solchen Hamiltonkreis an. Falls nein, dann begründen Sie, warum es keinen gibt.
- Geben Sie eine Platzierung der 8 Stände rund um den Marktplatz an, mit der alle zufrieden sind.

Aufgabe 3:

(25 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph, dessen Knotenmenge endlich ist. Beweisen Sie, dass G genau dann einen Euler-Weg besitzt, der kein Euler-Kreis ist, wenn es in G genau zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.

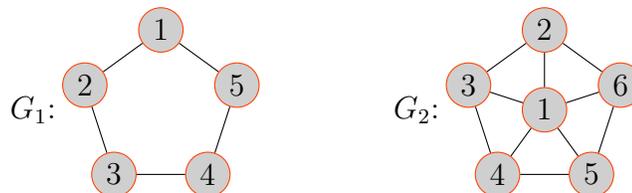
Aufgabe 4:

(12 + 13 = 25 Punkte)

Zwei Personen A und B spielen ein Spiel auf einem zusammenhängenden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. Die Spieler wählen abwechselnd Knoten v_1, v_2, v_3, \dots aus V , so dass v_1, v_2, v_3, \dots verschiedene Knoten sind und jeweils gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Den ersten Knoten wählt A. Der letzte Spieler, der einen Knoten wählen kann, gewinnt.

Ein Spieler hat eine *Gewinnstrategie* in dem Spiel genau dann, wenn der Spieler das Spiel, unabhängig davon wie der andere Spieler spielt, gewinnen kann.

- Geben Sie für jeden der beiden folgenden Graphen G_1 und G_2 ein Matching maximaler Größe an und entscheiden Sie, welcher der beiden Spieler in dem Spiel auf dem entsprechenden Graph eine Gewinnstrategie hat.



- Beweisen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - G besitzt ein Matching M , so dass jeder Knoten aus V zu mindestens einer Kante aus M inzident ist.
 - Spieler B hat eine Gewinnstrategie in dem oben beschriebenen Spiel auf G .