Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

19. November 2008

# Diskrete Modellierung

Wintersemester 2008/2009

## Übungsblatt 5

**Abgabe:** *bis 26. November 2008, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

**Aufgabe 1:** **(10 + 7 + 8 = 25 Punkte)**

**(a)** Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist.

- $\neg V_1$
- $\big((V_0 \vee \neg V_1) \leftrightarrow V_2\big)$
- $\big(\neg V_0 \rightarrow (V_0 \rightarrow V_1)\big)$
- $\big(V_0 \wedge (V_0 \rightarrow \neg V_0)\big)$
- $\Big((V_0 \rightarrow V_1) \leftrightarrow \big((V_0 \wedge \neg V_1) \rightarrow \mathbf{0}\big)\Big)$

**(b)** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die aussagenlogische Formel $\varphi_n$ definiert durch

$$\varphi_n \ := \begin{cases} (V_n \leftrightarrow V_{n+2}), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ (V_n \leftrightarrow \neg V_{n-1}), & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es gilt also

$$\varphi_0 = (V_0 \leftrightarrow V_2), \quad \varphi_1 = (V_1 \leftrightarrow \neg V_0), \quad \varphi_2 = (V_2 \leftrightarrow V_4), \quad \varphi_3 = (V_3 \leftrightarrow \neg V_2), \quad \cdots$$

Geben Sie eine Belegung $\mathcal{B}\colon \text{Var} \rightarrow \{0,1\}$ an, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{B}$ erfüllt $\varphi_n$.

**(c)** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

**(i)** $\big(\neg(V_0 \leftrightarrow V_1) \wedge (\neg V_2 \vee V_0)\big) \models \big(V_0 \vee (V_1 \wedge \neg V_2)\big)$

**(ii)** $\big(\neg(V_0 \leftrightarrow V_1) \wedge (\neg V_2 \vee V_0)\big) \equiv \big(V_0 \vee (V_1 \wedge \neg V_2)\big)$

**Aufgabe 2:** **(8 + 7 + 10 = 25 Punkte)**

Einer Ihrer Bekannten berichtet von seiner Zimmersuche in Frankfurt und äußert Ihnen gegenüber folgende Aussagen, die auf alle der von ihm besichtigten Wohnungen zutreffen:

- Wenn es sich um eine 1-Zimmer-Wohnung handelt, dann stehen höchstens 26 m$^2$ Wohnraum zur Verfügung oder der Mietpreis ist höher als 400 €.
- Wenn sich das Zimmer nicht in einer 1-Zimmer-Wohnung befindet, dann ist das Zimmer in einer WG.
- Wenn mehr als 26 m$^2$ Wohnraum zur Verfügung stehen, dann liegt das Zimmer nicht in einer WG.

- Wenn mehr als 26 $\mathrm{m}^2$ Wohnraum zur Verfügung stehen und der Mietpreis höher als 400 € ist, dann handelt es sich nicht um eine 1-Zimmer-Wohnung.

**(a)** Zerlegen Sie den obigen Text in atomare Aussagen und geben Sie eine aussagenlogische Formel $\varphi$ an, die das im Text zusammengefasste Wissen repräsentiert.

Betrachten Sie nun die nachfolgenden Aussagen:

- In jeder besichtigten Wohnung stehen Ihrem Bekannten maximal 26 $\mathrm{m}^2$ zur Verfügung.
- Für jede besichtigte Wohnung gilt: Wenn die Wohnung in einer WG liegt, dann beträgt der Mietpreis höchstens 400 €.
- Für jede besichtigte Wohnung gilt: Wenn der verlangte Mietpreis höchstens 400 € beträgt, dann handelt es sich um eine WG oder um eine 1-Zimmer-Wohnung.

**(b)** Geben Sie für jede der drei Aussagen eine aussagenlogische Formel an, die die Aussage repräsentiert.

**(c)** Entscheiden Sie für jede der drei aussagenlogischen Formeln aus (b), ob sie aus der Formel $\varphi$ in (a) folgt.

**Aufgabe 3:** **(12 + 13 = 25 Punkte)**

Betrachten Sie die aussagenlogische Formel

$$\varphi \ := \ \big(\neg(V_0 \leftrightarrow V_1) \wedge (\neg V_2 \vee V_0)\big).$$

**(a)** Wandeln Sie $\varphi$ mittels Wahrheitstafel in eine äquivalente aussagenlogische Formel in DNF um.

**(b)** Wenden Sie Algorithmus 3.39 an, um eine zu $\varphi$ äquivalente Formel in KNF zu finden.

**Aufgabe 4:** **(10 + 5 + 10 = 25 Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, seien $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ genau $2 \cdot n$ verschiedene aussagenlogische Variablen, und sei

$$\varphi_n \ := \ \bigwedge_{i=1}^{n} (X_i \leftrightarrow Y_i).$$

**(a)** Beschreiben Sie die erfüllenden Belegungen $\mathcal{B}\colon \mathrm{Var}(\varphi_n) \to \{0,1\}$ für $\varphi_n$. Wie viele solche Belegungen gibt es?

**(b)** Geben Sie eine zu $\varphi_n$ äquivalente Formel in DNF an.

**(c)** Beweisen Sie Satz 3.44, d.h. beweisen Sie, dass jede zu $\varphi_n$ äquivalente Formel in DNF mindestens $2^n$ konjunktive Klauseln hat.

*Hinweis:* Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dazu an, dass $\psi_n$ eine zu $\varphi_n$ äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als $2^n$ konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und $N$ konjunktive Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \dots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Ihrer Antwort aus Teil (a), dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ von mindestens zwei verschiedenen die Formel $\varphi_n$ erfüllenden Belegungen wahr gemacht wird. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.