Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

12. November 2008

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 4

Abgabe: *bis 19. November 2008, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: (8 + 12 + 5 = 25 Punkte)

(a) Betrachten Sie die folgenden Wörter und beweisen Sie jeweils, dass das Wort gemäß Definition 3.3 zur Sprache AL gehört oder begründen Sie, warum das Wort nicht zu AL gehört.

(i) $\neg\Big((V_3 \wedge \neg\mathbf{0}) \to \big(V_0 \vee (\neg\neg V_1 \wedge V_4)\big)\Big)$

(ii) $(V_5 \leftrightarrow X) \wedge \big(V_{23} \to (V_1 \wedge \mathbf{0})\big)$

(iii) $\Big((V_{11} \leftarrow V_7) \vee \neg\neg V_5\Big)$

(iv) $\big((V_9 \vee \neg(\neg V_{42}) \vee \neg V_2) \to \mathbf{1}\big)$

(b) Betrachten Sie die aussagenlogische Formel

$$\varphi \ := \ \Big((\neg V_0 \wedge V_1) \to \big(V_0 \wedge (V_1 \vee \neg V_2)\big)\Big)$$

und die Belegung $\mathcal{B}\colon \mathrm{Var}(\varphi) \to \{0,1\}$ mit $\mathcal{B}(V_0) = 1$ und $\mathcal{B}(V_1) = \mathcal{B}(V_2) = 0$. Berechnen Sie den Wert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}}$ in nachvollziehbaren Schritten analog zu Beispiel 3.9 aus der Vorlesung.

(c) Geben Sie den Syntaxbaum und die ASCII-Darstellung der Formel φ aus (b) an.

Aufgabe 2: (15 + 5 + 10 = 30 Punkte)

USA, 4. November 2008. Vor einem Wahllokal befragt ein Journalist vier Freunde A, B, C und D, die gerade das Wahllokal verlassen haben, wie sie gewählt haben. A sagt: „Falls B für Obama gestimmt hat, dann haben auch C und D für Obama gestimmt.“ B sagt: „A hat auf keinen Fall für Obama gestimmt, aber D.“ C sagt: „B hat nur dann für McCain gestimmt, wenn A für Obama gestimmt hat.“ D sagt schließlich: „Wenn C für Obama gestimmt hat, dann hat A für McCain oder B für Obama gestimmt.“ Wir nehmen an, dass jeder die Wahrheit gesagt und entweder Obama oder McCain gewählt hat.

(a) Zerlegen Sie den obigen Text in atomare Aussagen und geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die das im Text zusammengefasste Wissen repräsentiert (ähnlich wie in den Beispielen 3.1, 3.17 und 3.19 im Skript).

(b) Geben Sie für Ihre Formel φ aus (a) eine Belegung $\mathcal{B}$ an, die besagt, dass A, B und C Obama gewählt haben und D für McCain gestimmt hat. Erfüllt $\mathcal{B}$ die Formel φ?

(c) Wen haben A, B, C und D jeweils gewählt? Falls es mehrere Möglichkeiten gibt, geben Sie alle an.

Aufgabe 3: **(12 + 13 = 25 Punkte)**

Zwei Analysten streiten sich, wer von ihnen denn nun am besten Aktienkurse voraussagen kann. Dazu wollen sie drei zufällig anwesende Anleger A, B und C befragen. Das wäre nicht weiter schwierig, wenn sich A, B und C nicht folgendes (repräsentiert durch aussagenlogische Formeln) vorwerfen würden:

- A behauptet: $\varphi_A := (\neg B \vee \neg C)$
- B behauptet: $\varphi_B := \neg A$
- C behauptet: $\varphi_C := (A \wedge \neg B)$

Hierbei bedeuten die Aussagenvariablen:

- A: A sagt die Wahrheit.
- B: B sagt die Wahrheit.
- C: C sagt die Wahrheit.

(a) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der Formeln φ_A, φ_B, φ_C aussagt.

(b) Wem können die Analysten glauben und wem nicht? Falls es mehrere Möglichkeiten gibt, geben Sie alle an.

Aufgabe 4: **(10 + 10 = 20 Punkte)**

Beweisen Sie Beobachtung 3.27 (b) und (d) aus dem Skript, d.h. beweisen Sie, dass für alle aussagenlogischen Formeln φ und ψ gilt:

(a) $\varphi \models \mathbf{0} \iff \varphi$ ist unerfüllbar.

(b) $\varphi \models \psi \iff (\varphi \wedge \neg\psi)$ ist unerfüllbar.