Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

29. Oktober 2008

Diskrete Modellierung

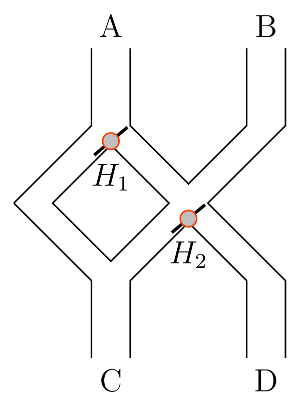
Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 5. November 2008, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(30 Punkte)**

Die nachfolgende Abbildung zeigt ein Spiel, in dem Murmeln bei A oder B in die Spielbahn fallen gelassen werden.



Je nach Stellung der Hebel H_1 und H_2 rollen die Murmeln in der Spielbahn nach links oder rechts. Sobald eine Murmel auf einen dieser Hebel trifft, wird der Hebel nach dem Passieren der Murmel umgestellt, so dass die nächste Murmel in die andere Richtung rollt. Zu Beginn ist jeder der beiden Hebel so eingestellt, dass die nächste Murmel, die auf den Hebel trifft, nach links rollt. Wenn beispielsweise nacheinander drei Murmeln fallen gelassen werden, wobei die erste und dritte Murmel bei A und die zweite Murmel bei B fallen gelassen wird, dann kommen die ersten beiden Murmeln an der Öffnung C und die letzte Murmel an der Öffnung D heraus.

Aus welcher Öffnung fällt die letzte Murmel, wenn

(a) fünf Murmeln fallen gelassen werden, wobei die erste und die vierte Murmel bei A und alle anderen Murmeln bei B fallen gelassen werden?

(b) sieben Murmeln fallen gelassen werden, wobei die erste, zweite, vierte und letzte Murmel bei A und alle anderen Murmeln bei B fallen gelassen werden?

Modellieren Sie zur Beantwortung der Fragen das Spiel analog zu Beispiel 1.1 aus der Vorlesung durch ein Transitionssystem. Überlegen Sie sich zunächst die möglichen Zustände und Zustandsübergänge, die auftreten können.

Hinweis: Jeder Zustand sollte Informationen darüber enthalten, in welche Richtung die nächste Murmel rollt, wenn sie auf H_1 trifft, in welche Richtung die nächste Murmel rollt, wenn sie auf H_2 trifft und aus welcher Öffnung die zuvor fallen gelassene Murmel herausgerollt ist.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

(a) Geben Sie alle Relationen von $A := \{x, y\}$ nach $B := \{c, d\}$ an. Geben Sie für jede Relation an, ob sie eine Funktion von A nach B oder eine partielle Funktion von A nach B oder keines von beiden ist. Geben Sie außerdem für jede Funktion an, ob sie injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist.

(b) Geben Sie für jede der folgenden Funktionen f an, ob die Funktion injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist. Geben Sie jeweils auch das Bild von f an.

- **(i)** $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) := x - 4$ für alle $x \in \mathbb{Z}$
- **(ii)** $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) := 2 \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$
- **(iii)** $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{Z}$
- **(iv)** $f\colon A^* \to \mathbb{N}$ für eine beliebige Menge A mit $|A| \geq 2$ und $f(w) := |w|$ für alle $w \in A^*$

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es,

- **(i)** zwei Bälle B_1, B_2 so auf drei Körbe K_1, K_2, K_3 zu verteilen, dass jeder Ball in einem anderen Korb landet? D.h. wie viele injektive Funktionen von $\{B_1, B_2\}$ nach $\{K_1, K_2, K_3\}$ gibt es?
- **(ii)** drei Bälle B_1, B_2, B_3 so auf zwei Körbe K_1, K_2 zu verteilen, dass kein Korb leer bleibt? D.h. wie viele surjektive Funktionen von $\{B_1, B_2, B_3\}$ nach $\{K_1, K_2\}$ gibt es?

Aufgabe 3: **(30 Punkte)**

Beweisen Sie Satz 2.38(b), d.h.: Sei B eine Menge, sei A eine endliche Menge und sei $k := |A|$. Zeigen Sie, dass es eine bijektive Funktion von $\mathrm{Abb}(A, B)$ nach B^k gibt.

Aufgabe 4: **(15 Punkte)**

Beweisen Sie, dass für alle Mengen A, B, C mit $A = B \cup C$ gilt: Falls A unendlich ist, so ist B oder C unendlich.