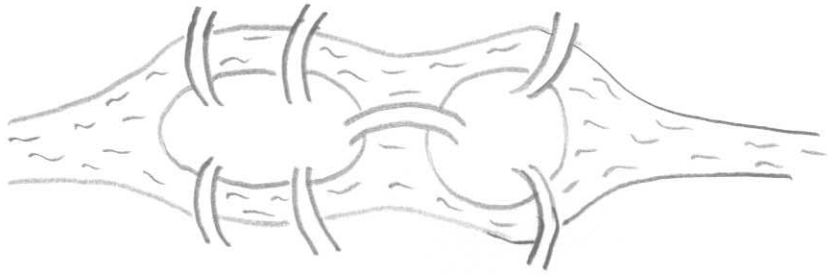
Das Problem, zu einem gegebenen Graphen zu entscheiden, ob er einen Hamilton-Kreis besitzt, ist algorithmisch ein schwieriges Problem:

man kann zeigen, dass es (genau wie das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem) NP-vollständig ist.

Im Gegensatz zu Hamilton-Wegen (bei denen es darum geht, einen Weg zu finden, der jeden Knoten des Graphen genau einmal besucht), geht es bei den im Folgenden betrachteten Euler-Wegen darum, einen Weg zu finden, der jede Kante des Graphen genau einmal besucht.

Beispiel 4.18 (Königsberger Brückenproblem)

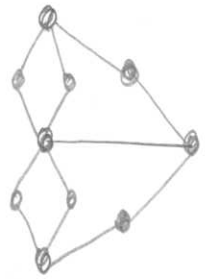
In der Stadt Königsberg gab es im 18. Jahrhundert 7 Brücken über den Fluss Pregel, die die Ufer und 2 Inseln miteinander verbanden. Skizze:



Frage: Gibt es einen Spaziergang, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

Die obige Skizze lässt sich folgendermaßen durch einen ungerichteten Graphen modellieren: für jedes Ufer, jede Insel und jede Brücke gibt es einen Knoten; Kanten zeigen direkte Verbindungen an. Die Skizze wird also durch folgenden Graphen repräsentiert:

$G_{\text{Königsberg}} :=$



Die Frage nach dem "Spaziergang" entspricht dann gerade der Frage: Gibt es in $G_{\text{Königsberg}}$ einen Euler-Kreis?

<u>Definition 4.19</u> (Euler-Kreise und Euler-Wege)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph

a) Ein Weg $W = (v_0, \dots, v_\ell)$ heißt <u>Euler-Weg</u>, wenn W jede Kante aus E genau einmal enthält, d.h. wenn es für jedes $e \in E$ genau ein $i \in \{0, \dots, \ell-1\}$ gibt, so dass $e = \{v_i, v_{i+1}\}$.

b) Ein Weg $W = (v_0, \dots, v_\ell)$ heißt <u>Euler-Kreis</u>, wenn W ein Euler-Weg ist und $v_0 = v_\ell$ ist.

Satz 4.20 (Existenz von Euler-Kreisen und Euler-Wegen)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph.

Dann gilt:

(a) G besitzt einen Euler-Kreis $\iff$ jeder Knoten von G hat einen geraden Grad (d.h. ist mit einer geraden Anzahl von Kanten inzident)

(b) G besitzt einen Euler-Weg, der kein Euler-Kreis ist $\iff$ es gibt in G genau zwei Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis:

(a) "$\Longrightarrow$": Sei $K = (v_0, \dots, v_\ell)$ ein Euler-Kreis. Insbes.: $v_0 = v_\ell$.

Schritt 1: Jeder Knoten $v \in \{v_0, \dots, v_{\ell-1}\}$ hat geraden Grad,

denn: Sei $v \in \{v_0, \dots, v_{\ell-1}\}$ beliebig.

Zu jedem $i \in \{0, \dots, \ell-1\}$ mit $v = v_i$ gibt es im Euler-Kreis K zwei verschiedene Kanten, nämlich $\{v_{i-1}, v_i\}$ und $\{v_i, v_{i+1}\}$ (falls $i \neq 0$) bzw., falls $i = 0$, $\{v_0, v_1\}$ und $\{v_{\ell-1}, \underset{v_\ell}{\underset{\parallel}{v_0}}\}$.

Da der Euler-Kreis K jede Kante von G genau einmal enthält, gilt somit folgendes: Ist $k = |\{i \in \{0, \dots, \ell-1\} : v = v_i\}|$ (d.h. k gibt an, wie oft v im Tupel $(v_0, \dots, v_{\ell-1})$ vorkommt), so ist $\mathrm{Grad}_G(v) = 2 \cdot k$. Daher hat jeder Knoten $v \in \{v_0, \dots, v_{\ell-1}\}$ geraden Grad.

Schritt 2: $\{v_0, \dots, v_{e-1}\} = V$,

denn: Laut Voraussetzung ist G zusammenhängend. Für beliebige Knoten $v, w \in V$ gilt daher: es gibt in G einen Weg von v nach w. Da K ein Euler-Kreis ist, enthält K sämtliche Kanten, die auf dem Weg von v nach w vorkommen. Insbesondere gilt also f.a. $v, w \in V$, dass $v, w \in \{v_0, \dots, v_{e-1}\}$.

Schritt 3: Aus Schritt 1 und Schritt 2 folgt direkt, dass jeder Knoten von G geraden Grad hat.

"$\Leftarrow$": Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad hat. Es sei

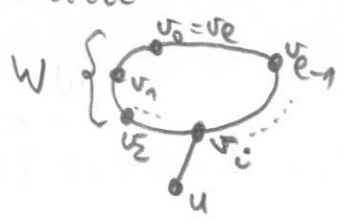
$$W = (v_0, \dots, v_e)$$

ein Weg maximaler Länge in G, der keine Kante(n) mehrfach enthält. Da wir W nicht mehr verlängern können, liegen alle mit v_e inzidenten Kanten auf W.
Da laut unserer Voraussetzung die Anzahl dieser Kanten gerade ist, folgt $v_e = v_0$. Zu zeigen: W ist ein Euler-Kreis.
Angenommen, W ist kein Euler-Kreis. Dann gibt es in G eine Kante e die nicht auf W liegt, die aber mit mindestens einem Knoten auf W inzident ist (um dies zu sehen, nutzen wir, dass G zusammenhängend ist). Sei v_i der zu e inzidente Knoten aus W und sei $u \in V$ der andere zu e inzidente Knoten, d.h. $e = \{u, v_i\}$.

Dann ist der Weg

$$W' := (u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{\ell-1}, v_0, v_1, \dots, v_i)$$

Skizze:



ein Weg der Länge $\ell+1$, der keine Kante(n) mehrfach enthält. Insbes. ist W' länger als W. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass W ein Weg <u>maximaler</u> Länge ist.

<u>(b)</u>: Folgt leicht aus (a).
Details: Übung. $\square$

<u>Beispiel 4.21</u>

Mit Hilfe von Satz 4.20 können wir das Königsberger Brückenproblem aus Beispiel 4.18 leicht lösen:

Es gibt <u>keinen</u> Spaziergang, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt, denn: ein solcher Spaziergang würde gerade einem Euler-Kreis im Graphen $G_{\text{Königsberg}}$ entsprechen.

Dieser Graph besitzt aber 4 Knoten von ungeradem Grad und kann daher laut Satz 4.20 <u>(a)</u> keinen Euler-Kreis besitzen.

Beispiel 4.22

Frage: Kann man die Figur  in einem Zug nachzeichnen?

DH: Besitzt dieser Graph einen Euler-Weg?

Unter Verwendung von Satz 4.20 kann man die Frage leicht beantworten, indem man nachzählt, wie viele Knoten von ungeradem Grad es gibt.
Im obigen Graphen gibt es genau 2 Knoten von ungeradem Grad. Gemäß Satz 4.20 besitzt G also einen Euler-Weg, der kein Euler-Kreis ist.

Ähnlichkeit zweier Graphen

Die folgende Definition formalisiert, wann ein Graph G' in einem Graphen G "enthalten" ist:

Definition 4.23 (Teilgraph)

Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei (gerichtete oder ungerichtete) Graphen.

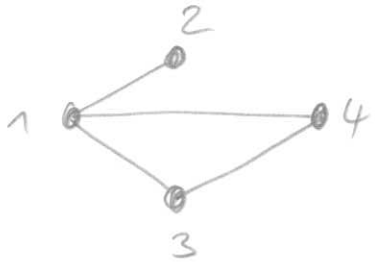
G' heißt <u>Teilgraph von G</u>, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

G' heißt <u>induzierter Teilgraph von G</u>, falls $V' \subseteq V$ und

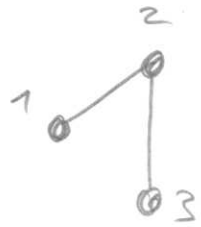
$$E' = \{ e \in E : \text{die mit } e \text{ inzidenten Knoten liegen in } V' \}$$

Beispiel 4.24

$G :=$



$G''' :=$



$G' :=$

$G'' :=$

G' ist ein Teilgraph von G, aber kein induzierter Teilgraph von G.

G'' ist ein induzierter Teilgraph von G

G''' ist kein Teilgraph von G.

Bemerkung 4.25

Zwei Graphen $G=(V,E)$ und $G'=(V',E')$ sind <u>gleich</u> (kurz: $G=G'$), falls sie dieselbe Knotenmenge und dieselbe Kantenmenge besitzen. D.h:

$$G = G' \quad :\Leftrightarrow \quad V=V' \text{ und } E=E'$$

Zwei Graphen G und G' sind "<u>prinzipiell gleich</u>" (Fachbegriff: <u>isomorph</u>, kurz: $G \cong G'$), falls G' aus G durch Umbenennung der Knoten entsteht.
Dies wird durch die folgende Definition präzisiert:

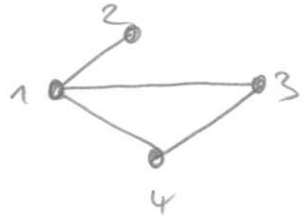
Definition 4.26 (Isomorphie von Graphen)

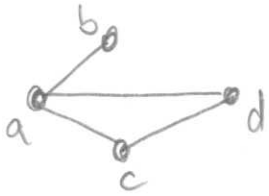
Seien $G=(V,E)$ und $G'=(V',E')$ zwei (gerichtete oder ungerichtete) Graphen. G und G' heißen <u>isomorph</u> (kurz: $G \cong G'$, in Worten: G ist isomorph zu G'), falls es eine bijektive Abbildung $f: V \to V'$ gibt, so dass für alle Knoten $i \in V$ und $j \in V$ gilt:

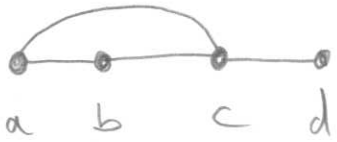
- falls G und G' gerichtet sind:
$$(i,j) \in E \iff (f(i), f(j)) \in E'$$
- falls G und G' ungerichtet sind:
$$\{i,j\} \in E \iff \{f(i), f(j)\} \in E'$$

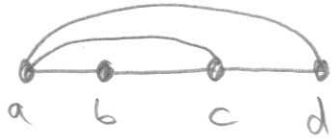
Eine solche Abbildung f wird <u>Isomorphismus von G nach G'</u> genannt.

Beispiel 4.27

$G :=$ 

$G' :=$ 

$G'' :=$ 

$G''' :=$ 

Es gilt:

- $G \cong G'$ via $f: \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$ mit $f(1)=a$, $f(2)=b$, $f(3)=d$, $f(4)=c$
- $G \cong G''$ via $f: \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$ mit $f(1)=c$, $f(2)=d$, $f(3)=a$, $f(4)=b$
- G'' ist nicht isomorph zu G''', kurz: $G'' \not\cong G'''$, da G''' <u>mehr</u> Kanten als G'' hat.

Markierte Graphen

Bemerkung 4.28

Viele Modellierungsaufgaben erfordern, dass den Knoten oder den Kanten eines Graphen weitere Informationen zugeordnet werden. Dies wird durch so genannte <u>Markierungsfunktionen</u> für Knoten oder Kanten formalisiert.

Eine <u>Knotenmarkierung</u> eines (gerichteten oder ungerichteten) Graphen $G = (V,E)$ ist eine Abbildung $MV: V \to WV$, wobei WV ein geeigneter Wertebereich ist. In dem Graph aus Beispiel 4.1(a) könnte man beispielsweise eine Knotenmarkierung

$$\text{Einwohnerzahl}: V \to \mathbb{N}$$

einführen, die jedem Knoten die Einwohnerzahl der zugehörigen Stadt zuordnet.

Eine <u>Kantenmarkierung</u> von G ist eine Abbildung

$ME : E \to WE$, wobei WE ein geeigneter Wertebereich ist.

In dem Graph aus Beispiel 4.1 (a) könnte man beispielsweise eine Kantenmarkierung

$$\text{Entfernung} : E \to \mathbb{N}$$

einführen, die jeder Kante die Länge (in km) des von der Kante repräsentierten Autobahnteilstücks zuordnet.

Kantenmarkierungen kann man auch dazu verwenden, um auszudrücken, dass es zwischen zwei Knoten mehr als eine Kante gibt: die Markierungsfunktion gibt dann an, für wie viele Verbindungen die eine Kante des Graphen steht.

<u>Definition 4.29</u> (Multigraph)

Ein <u>Multigraph</u> (G, m) besteht aus einem (gerichteten oder ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ und einer Kantenmarkierung $m : E \to \mathbb{N}$.

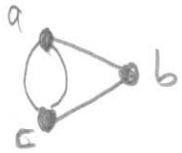
<u>Beispiel</u>: Multigraph (G, m) mit

$G =$ 

und
$m(\{a,b\}) = 1$
$m(\{b,c\}) = 1$
$m(\{c,a\}) = 2$

graphische Darstellung von (G, m):

bzw.



Zuordnungsprobleme

Beispiel 4.30

Typische Aufgabenstellungen:

(a) In einem Tennisverein sollen die Vereinsmitglieder für ein Turnier zu Doppelpaarungen zusammengestellt werden. Dabei möchte man jeweils nur befreundete Personen als "Doppel" zusammen spielen lassen.

(b) Eine Gruppe unterschiedlich ausgebildeter Piloten soll so auf Flugzeuge verteilt werden, dass jeder das ihm zugeteilte Flugzeug fliegen kann.

Beide Situationen lassen sich gut durch ungerichtete Graphen modellieren:

zu (a): Modelliere die Situation durch den Graphen

$G_T := (V_T, E_T)$ mit

$V_T := \{x : x \text{ ist ein Vereinsmitglied}\}$

$E_T := \{\{x,y\} : x \text{ und } y \text{ sind befreundete Vereinsmitglieder}\}$

Ziel: Finde eine größtmögliche Anzahl von Doppelpaarungen, d.h. finde eine möglichst große Menge $E' \subseteq E_T$, so dass kein Vereinsmitglied Endpunkt von mehr als einer Kante aus E' ist.

zu (b): Modelliere die Situation durch den Graphen

$G_F := (V_F, E_F)$ mit

$V_F := \{x : x \text{ ist ein Pilot}\} \dot\cup \{y : y \text{ ist ein Flugzeug}\}$

$E_F := \{\{x, y\} : \text{Pilot } x \text{ kann Flugzeug } y \text{ fliegen}\}$

Ziel: Stelle einen Flugplan auf, so dass jeder Pilot das ihm zugeteilte Flugzeug fliegen kann, d.h. finde eine möglichst große Menge $E' \subseteq E_F$, so dass kein Element aus V_F Endpunkt von mehr als einer Kante in E' ist.

Die gesuchten Kantenmengen E' aus (a) und (b) werden auch Matching genannt:

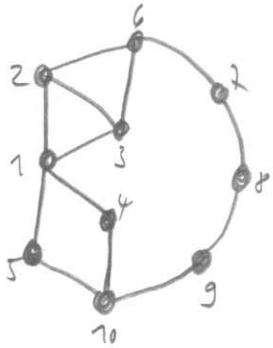
Definition 4.31

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Eine Kantenmenge $E' \subseteq E$ heißt Matching (bzw. Menge unabhängiger Kanten), falls gilt: kein Knoten aus V ist Endpunkt von mehr als einer Kante aus E'.

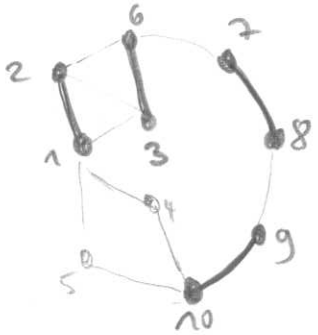
Ziel in Beispiel 4.30 (a) und (b) ist es, ein Matching maximaler Größe (d.h eins, das so viele Kanten wie möglich enthält) zu finden.

Beispiel 4.32

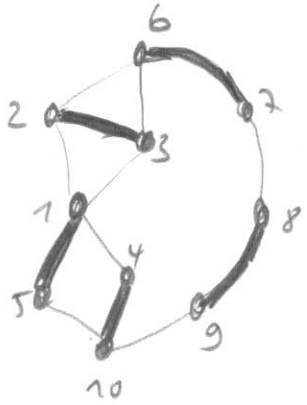
In einem Tennisverein mit 10 Mitgliedern und "Freundschaftsgraph" $G_T =$



sind z.B. die folgenden beiden Kantenmengen Matchings:



und



$E' = \{ \{1,2\}, \{3,6\}, \{7,8\}, \{9,10\} \}$ $\qquad$ $E'' := \{ \{1,5\}, \{4,10\}, \{8,9\}, \{6,7\}, \{2,3\} \}$.

In Beispiel 4.30 (b) sollten Piloten auf Flugzeuge verteilt werden. Die Knotenmenge des zugehörigen Graphen G_F bestand aus zwei verschiedenen Arten von Objekten (nämlich einerseits Piloten und andererseits Flugzeuge), und Kanten konnten jeweils nur zwischen Objekten unterschiedlicher Art verlaufen (also zwischen Piloten und Flugzeugen, nicht aber zwischen Piloten und Piloten bzw. zw. Flugzeugen und Flugzeugen).

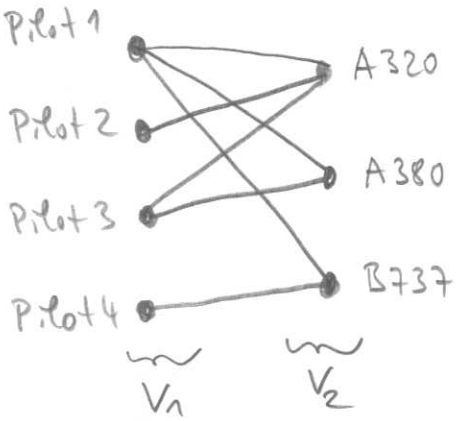
Solche Graphen werden <u>bipartite Graphen</u> genannt:

Definition 4.33

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt <u>bipartit</u>, wenn seine Knotenmenge V so in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 zerlegt werden kann, dass jede Kante aus E einen Endknoten in V_1 und einen Endknoten in V_2 hat.

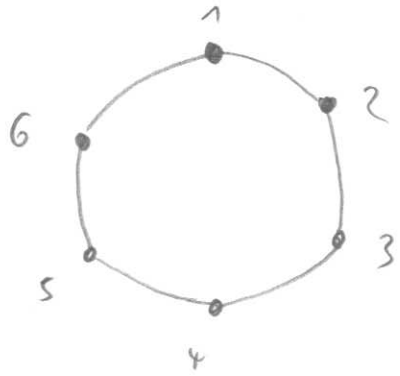
Beispiel 4.34

(a)



ist ein bipartiter Graph

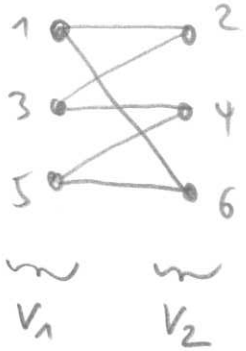
(b)



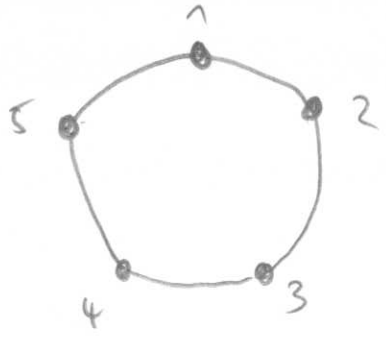
ist ein bipartiter Graph, denn wähle

$V_1 = \{1, 3, 5\}$, $V_2 = \{2, 4, 6\}$;

andere graphische Darstellung des Graphen:



(c)



ist <u>kein</u> bipartiter Graph

(denn angenommen doch, seien V_1 und V_2 die beiden disjunkten Teilmengen der Knotenmenge, so dass jede Kante des Graphen einen Endknoten in V_1 und einen Endknoten in V_2 hat; oBdA nehmen wir an, dass $1 \in V_1$ ist. Dann muss aber gelten: $2 \in V_2$, $3 \in V_1$, $4 \in V_2$, $5 \in V_1$, also $V_1 = \{1,3,5\}$ und $V_2 = \{2,4\}$. <u>Aber</u>: es gibt eine Kante zwischen 1 und 5, und beide Knoten gehören zu V_1. ↯)

Allgemein gilt: Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und ist G ein Kreis auf n Knoten (wie in (b) für $n=6$ und in (c) für $n=5$), so gilt:

G ist bipartit $\Leftrightarrow$ n ist gerade.

Ein weiteres typisches Beispiel für ein Zuordnungsproblem:

<u>Beispiel 4.35</u>

Die Gäste einer Familienfeier sollen so an einer hufeisenförmigen Tafel  platziert werden,

dass niemand neben jemandem sitzt, den er nicht leiden kann.

<u>Lösungsansatz:</u>

<u>Schritt 1:</u> Stelle den <u>Konfliktgraphen</u> $G = (V, E)$ auf

mit $V = \{x :$ Person x soll zur Feier eingeladen werden$\}$

und $E = \{ \{x,y\} :$ Person x kann Person y nicht leiden oder Person y kann Person x nicht leiden$\}$

d.h: Kanten im Konfliktgraphen zeigen auf, wer im Konflikt mit wem steht.

<u>Schritt 2:</u> Bilde das Komplement $\tilde{G} := (\tilde{V}, \tilde{E})$ des Konfliktgraphen, d.h. betrachte

$\tilde{V} := V$

$\tilde{E} := \{ \{x,y\} : x, y \in V,\ x \neq y,\ \{x,y\} \notin E \}$

d.h: Kanten in $\tilde{G}$ zeigen an, wer prinzipiell neben wem platziert werden könnte.

Schritt 3: Suche einen Hamilton-Weg in $\tilde{G}$.

Wenn $(v_1, \dots, v_n)$ (mit $n = |\tilde{V}|$) ein Hamilton-Weg in $\tilde{G}$ ist, dann kann man die Sitzordnung folgendermaßen festlegen:

Falls es in $\tilde{G}$ keinen Hamilton-Weg gibt, so weiß man, dass es keine Möglichkeit gibt, die geladenen Gäste so an einer hufeisenförmigen Tafel zu platzieren, dass niemand neben jemandem sitzt, den er nicht leiden kann.

Ein möglicher Ausweg: Verteile die Gäste auf mehrere Tische:

Beispiel 4.36

Die Gäste einer Familienfeier sollen so an mehreren (möglichst wenigen) Tischen platziert werden, dass Personen, die sich nicht ausstehen können, an verschiedenen Tischen sitzen.

Diese Aufgabe kann folgendermaßen modelliert werden: Die verfügbaren Tische werden durchnummeriert mit den Zahlen 1, 2, 3, ... Die geladenen Gäste und die herrschenden Konflikte zwischen Gästen werden durch den in Beispiel 4.35 betrachteten Konfliktgraphen $G = (V, E)$ repräsentiert.

Die Zuordnung, wer an welchem Tisch sitzen soll, wird durch eine Knotenmarkierung

$$m: V \to \mathbb{N}_{>0}$$

repräsentiert ($m(x) = i$ bedeutet dann, dass Person x an Tisch i sitzen soll).

<u>Ziel</u>: Finde eine <u>konfliktfreie Knotenmarkierung</u> $m: V \to \mathbb{N}_{>0}$, d.h. eine Knotenmarkierung, so dass für jede Kante $\{x,y\} \in E$ gilt: $m(x) \neq m(y)$.

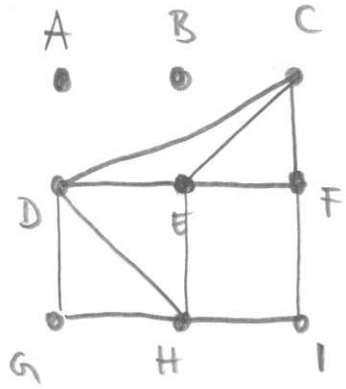
Dabei soll $|\text{Bild}(m)|$ möglichst klein sein (dies entspricht dem Ziel, die Gäste auf möglichst <u>wenige</u> Tische zu verteilen).

<u>Definition 4.37</u>

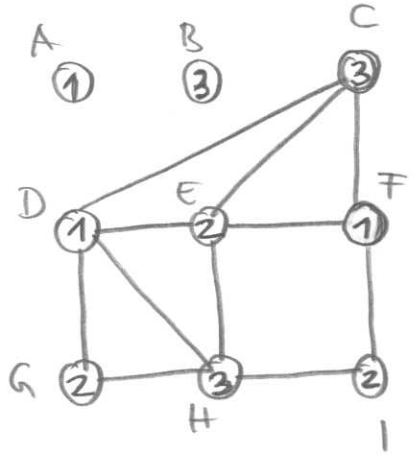
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Eine Funktion $m: V \to \mathbb{N}$ heißt <u>konfliktfreie Knotenmarkierung</u> (oder: konfliktfreie <u>Färbung</u>), wenn für jede Kante $\{x,y\} \in E$ gilt: $m(x) \neq m(y)$.

Beispiel 4.38

Familienfeier mit Gästen A, B, C, D, E, F, G, H, I und folgendem Konfliktgraphen

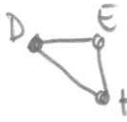


Eine konfliktfreie Knotenmarkierung (dh. Platzierung an verschiedene Tische) $m: V \to \mathbb{N}$:



Hier ist für jeden Knoten $v \in V$ der Wert $m(v)$ in den Kreis geschrieben, der den Knoten v repräsentiert.

Für die hier gegebene Markierung m gilt $|\text{Bild}(m)| = 3$, die Gäste werden also auf 3 Tische verteilt.

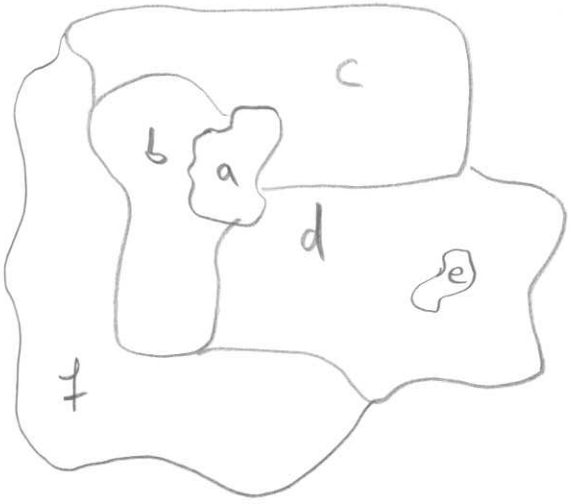
Dies ist "optimal", da der Konfliktgraph ein Dreieck (z.B. ) als Teilgraph enthält — deshalb muss für jede konfliktfreie Knotenmarkierung m' gelten: $|\text{Bild}(m')| \geq 3$.

Bemerkung 4.39

Die wohl berühmteste Aufgabe dieser Art von Markierungs- oder Färbungsaufgaben ist das so genannte 4-Farben-Problem. Dabei handelt es sich um die Hypothese, dass vier verschiedene Farben ausreichen, um eine Landkarte so einzufärben, dass zwei Staaten, die ein Stück gemeinsamer Grenze haben, durch unterschiedliche Farben dargestellt werden. Erst 1976 wurde diese Hypothese bewiesen, und zwar durch eine Fallunterscheidung mit mehr als 1.000 Fällen, die mit Hilfe eines Computerprogramms gelöst wurde.

Beispiel:

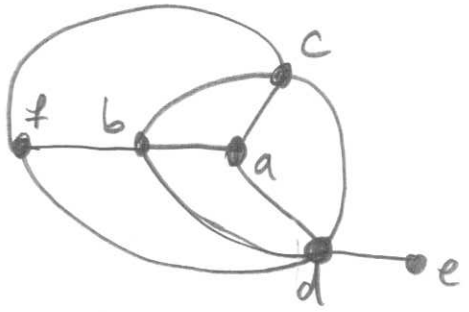
eine (kleine) Landkarte



zugehöriger Konfliktgraph:

Knoten ≙ Staaten

Kanten ≙ Staaten mit gemeinsamer Grenze



Da bei den vier Knoten a, b, c, d paarweise jeder zu jedem benachbart ist, muss eine konfliktfreie Färbung diesen 4 Knoten 4 verschiedene Farben zuordnen — für a, b, c, d etwa rot, gelb, grün, blau. Da f außerdem mit b, c, d benachbart ist, muss f dann wieder rot gefärbt sein. e kann jede Farbe außer blau erhalten.

Die zu Landkarten gehörenden Konfliktgraphen haben eine besondere Eigenschaft: sie sind planar.

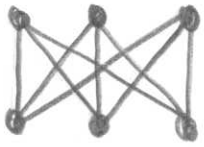
Definition 4.40

Ein Graph G heißt <u>planar</u>, wenn er so in die Ebene gezeichnet werden kann, dass seine Kanten sich nicht kreuzen.

Beispiel:

planare Graphen:  , 

(denn dieser Graph kann kreuzungsfrei so in die Ebene gezeichnet werden)

nicht-planare Graphen:  , 

Bemerkung 4.41

Die Anzahl verschiedener "Farben" bzw "Markierungen", die mindestens nötig sind, um einen Graphen $G=(V,E)$ konfliktfrei zu färben (bzw. markieren), nennt man auch die <u>chromatische Zahl</u> des Graphen, kurz: $\chi(G)$ ("chi(G)").

Präzise: $\chi(G) := \min\{\, |\mathrm{Bild}(m)| : m: V \to \mathbb{N}$ ist eine konfliktfreie Knotenmarkierung für $G \,\}$

Beispiel 4.42:

Weitere Beispiele von Anwendungen, die durch Finden konfliktfreier Färbungen im Konfliktgraphen gelöst werden können:

Knoten	Kante zwischen x und y	Farbe bzw. Markierung
Staat auf Karte	haben gemeinsame Grenze	Farbe
Gast auf Familienfeier	können sich nicht leiden	Tischnummer
Vorlesung	haben gemeinsame Teilnehmer	Termin
Variable im Programm	ihre Werte werden gleichzeitig benötigt	Registerspeicher
Prozess	benötigen dieselben Ressourcen	Ausführungstermin