Andererseits wurden (besonders in den letzten Jahren) Heuristiken und randomisierte Algorithmen entwickelt, die das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem trotzdem in vielen Fällen erstaunlich effizient lösen können.

Die folgenden Begriffe werden Ihnen in späteren Vorlesungen immer wieder begegnen:

<u>Definition 3.15</u>

Sei φ eine aussagenlogische Formel.

(a) φ heißt <u>erfüllbar</u>, wenn es (mindestens) eine erfüllende Belegung für φ gibt, d.h. wenn es (mindestens) eine zu φ passende Belegung $\mathcal{B}$ gibt mit $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$

(b) φ heißt <u>unerfüllbar</u>, wenn es <u>keine</u> erfüllende Belegung für φ gibt.

(c) φ heißt <u>allgemeingültig</u> (bzw. <u>Tautologie</u>), wenn <u>jede</u> zu φ passende Belegung φ erfüllt, d.h. wenn für jede zu φ passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt: $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$

Beispiel 3.16

(a) Die Formel $((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y))$ ist

- erfüllbar, da z.B. die Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(X) = 0$ und $\mathcal{B}(Y) = 1$ die Formel erfüllt
- nicht allgemeingültig, da z.B. die Belegung $\mathcal{B}'$ mit $\mathcal{B}'(X) = 0$ und $\mathcal{B}'(Y) = 0$ die Formel nicht erfüllt

(b) Die Formel $(X \wedge \neg X)$ ist

unerfüllbar, da für jede zur Formel passende Belegung $\mathcal{B}$ entweder $\mathcal{B}(X) = 1$ oder $\mathcal{B}(X) = 0$ gilt

Fall 1: $\mathcal{B}(X) = 1$:

$$[\![(X \wedge \neg X)]\!]^{\mathcal{B}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{B}(X) = 1 \text{ und } \mathcal{B}(X) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= 0, \text{ da } \mathcal{B}(X) = 1 \neq 0$$

Fall 2: $\mathcal{B}(X) = 0$:

$$[\![(X \wedge \neg X)]\!]^{\mathcal{B}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{B}(X) = 1 \text{ und } \mathcal{B}(X) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= 0, \text{ da } \mathcal{B}(X) = 0 \neq 1.$$

(c) Die Formel $(X \vee \neg X)$ ist

allgemeingültig, da für jede zur Formel passende Belegung $\mathcal{B}$ entweder $\mathcal{B}(X) = 1$ oder $\mathcal{B}(X) = 0$ gilt. Somit gilt $[\![(X \vee \neg X)]\!]^{\mathcal{B}} = 1$, für alle zur Formel passenden Belegungen $\mathcal{B}$.

Beobachtung 3.17

Sei φ eine aussagenlogische Formel.

(a) φ ist erfüllbar $\Longleftrightarrow$ in der Wahrheitstafel für φ steht in der mit "φ" beschrifteten Spalte mindestens eine 1.

(b) φ ist unerfüllbar $\Longleftrightarrow$ in der Wahrheitstafel für φ stehen in der mit "φ" beschrifteten Spalte nur Nullen.

(c) φ ist allgemeingültig $\Longleftrightarrow$ in der Wahrheitstafel für φ stehen in der mit "φ" beschrifteten Spalte nur Einsen.

Folgerung 3.18

Für alle aussagenlogischen Formeln φ gilt:

$$\varphi \text{ ist allgemeingültig} \Longleftrightarrow \neg\varphi \text{ ist unerfüllbar.}$$

Folgerung und Äquivalenz

Definition 3.19 (semantische Folgerung)

Seien φ und ψ zwei aussagenlogische Formeln.
Wir sagen: <u>ψ folgt aus φ</u> (kurz: $\varphi \models \psi$, "φ impliziert ψ"), falls für jede zu φ und ψ passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt:

Falls $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$, so auch $[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$.

D.h.: $\varphi \models \psi$ $:\Leftrightarrow$ Jede Belegung, die zu φ und ψ passt und die φ erfüllt, erfüllt auch ψ.

Beispiel 3.20

Sei $\varphi := ((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y))$ und $\psi := (Y \vee (\neg X \wedge \neg Y))$

Dann gilt $\varphi \models \psi$, aber <u>nicht</u> "$\psi \models \varphi$" (kurz: $\psi \not\models \varphi$),

denn:

X	Y	$(X \vee Y)$	$(\neg X \vee Y)$	φ	ψ
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Hier steht in jeder Zeile (d.h. jede zu φ und ψ passende Belegung), in der in der mit "φ" beschrifteten Spalte eine 1 steht, auch in der mit "ψ" beschrifteten Spalte eine 1.
Somit gilt $\varphi \models \psi$.

Andererseits steht in Zeile 1 in der mit ψ beschrifteten Spalte eine 1 und in der mit φ beschrifteten Spalte eine 0. Für die entsprechende Belegung $\mathcal{B}$ (mit $\mathcal{B}(X)=0$ und $\mathcal{B}(Y)=0$) gilt also

$$[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} = 1 \quad \text{und} \quad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 0.$$

Daher gilt $\psi \not\models \varphi$.

<u>Beobachtung 3.21:</u>

Seien φ und ψ aussagenlogische Formeln.
Dann gilt:

(a) $1 \models \varphi \iff \varphi$ ist allgemeingültig

(b) $\varphi \models 0 \iff \varphi$ ist unerfüllbar

(c) $\varphi \models \psi \iff (\varphi \to \psi)$ ist allgemeingültig

(d) $\varphi \models \psi \iff \varphi \wedge \neg\psi$ ist unerfüllbar

<u>Beweis:</u> Übung.

Definition 3.22 (logische Äquivalenz)

Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ heißen <u>äquivalent</u> (kurz: $\varphi \equiv \psi$), wenn für alle zu φ und ψ passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt: $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{B}}$.

Beispiel 3.23

Sei $\varphi := (X \wedge (X \vee Y))$ und $\psi := X$.

Dann ist $\varphi \equiv \psi$, denn

X	Y	$(X \vee Y)$	φ	ψ
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Hier ist die mit "φ" beschriftete Spalte identisch zur mit "ψ" beschrifteten Spalte. D.h. für alle zu φ und ψ passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt: $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{B}}$.

D.h.: $\varphi \equiv \psi$.

Beobachtung 3.24:

Seien φ und ψ aussagenlogische Formeln. Dann gilt:

(a) $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \leftrightarrow \psi)$ ist allgemeingültig

$\iff \varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$.

(b) φ ist allgemeingültig $\iff$ $\varphi \equiv 1$

(c) φ ist erfüllbar $\iff$ $\varphi \not\equiv 0$
(dh: "$\varphi \equiv 0$" gilt nicht).

Beweis: Übung.

Fundamentale Äquivalenzen der Aussagenlogik

Satz 325:
Seien φ, ψ und χ aussagenlogische Formeln. Dann gilt:

(1) (Idempotenz):
- $(\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi$
- $(\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi$

(2) (Kommutativität):
- $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$
- $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$

(3) (Assoziativität):
- $((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$
- $((\varphi \vee \psi) \vee \chi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \chi))$

(4) (Absorption):
- $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$
- $(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \equiv \varphi$

(5) (Distributivität):
- $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$
- $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$

(6) (doppelte Negation): $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

(7) (De Morgansche Regeln):
- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

(8) (Tertium non Datur):
- $(\varphi \wedge \neg\varphi) \equiv 0$
- $(\varphi \vee \neg\varphi) \equiv 1$

(9)
- $(\varphi \wedge 1) \equiv \varphi$
- $(\varphi \wedge 0) \equiv 0$
- $(\varphi \vee 1) \equiv 1$
- $(\varphi \vee 0) \equiv \varphi$

(10)
- $1 \equiv \neg 0$
- $0 \equiv \neg 1$

(11) (Elimination der Implikation): $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$

(12) (Elimination der Biimplikation): $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$

Beweis: Durch einfaches Nachrechnen. Details: Übung.

Bemerkung 3.26:

Durch schrittweises Anwenden der in Satz 3.25 aufgelisteten Äquivalenzen kann man eine gegebene aussagenlogische Formel in eine zu ihr äquivalente Formel umformen.

Beispiel: Sind φ und ψ aussagenlogische Formeln, so gilt:

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \quad \text{(Satz 3.25 (12))}$$

$$\equiv ((\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)) \quad \text{(Satz 3.25 (11))}$$

Normalformen

Bisher haben wir gesehen, wie man für eine gegebene aussagenlogische Formel φ eine Wahrheitstafel aufstellen kann.

Frage: Wie kann man umgekehrt zu einer gegebenen Wahrheitstafel eine Formel φ finden, zu der die Wahrheitstafel passt?

Beispiel 3.27: Betrachte die Wahrheitstafel $T :=$

X	Y	Z	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Eine Formel φ, so dass T die Wahrheitstafel für φ ist, kann man folgendermaßen erzeugen:

- Betrachte alle Zeilen von T, in denen in der mit "φ" beschrifteten Spalte eine 1 steht

- Für jede solche Zeile konstruiere eine Formel, die genau von der zur Zeile gehörenden Belegung erfüllt wird
- Bilde die Disjunktion (dh Ver-ODER-ung) über all diese Formeln.
  Dies liefert die gesuchte Formel φ.

In unserer Beispiel-Wahrheitstafel T gibt es genau 3 Zeilen, in denen in der mit φ beschrifteten Spalte eine 1 steht, nämlich die Zeilen

X	Y	Z	φ	zur Belegung der jeweiligen Zeile gehörende Formel:
0	0	0	1	$(\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$
⋮	⋮	⋮	⋮	
1	0	0	1	$(X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$
1	0	1	1	$(X \wedge \neg Y \wedge Z)$
⋮	⋮	⋮	⋮	

$\Rightarrow$ zur Wahrheitstafel T passende Formel $\varphi :=$

$$(\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z).$$

Generell kann man auf die beschriebene Art zu jeder beliebigen Wahrheitstafel eine aussagenlogische Formel konstruieren, die zur Wahrheitstafel passt. Die so konstruierten Formeln haben eine besonders einfache Form: Sie sind Disjunktionen von Formeln, die aus Konjunktionen von Variablen oder negierten Variablen bestehen.

Formeln, die diese spezielle Struktur besitzen, nennt man auch Formeln in <u>disjunktiver Normalform</u> (kurz: <u>DNF</u>).

<u>Definition 3.28:</u>

<u>(a)</u> Ein <u>Literal</u> ist eine Formel der Form X oder $\neg X$, wobei $X \in AVAR$ (d.h. X ist eine Aussagenvariable).
Ein Literal der Form X, mit $X \in AVAR$, wird auch <u>positives Literal</u> genannt; eine Formel der Form $\neg X$, mit $X \in AVAR$, <u>negatives Literal</u>.

<u>(b)</u> Eine aussagenlogische Formel ist in <u>disjunktiver Normalform</u> (<u>DNF</u>), wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, d.h. wenn sie die Gestalt

$$\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij} \right)$$

hat, wobei $n, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}_{>0}$ und l_{ij} ein Literal ist (für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m_i\}$).
Die Teilformeln $\mathcal{H}_i := \bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij}$ (für $i \in \{1, \ldots, n\}$) heißen <u>konjunktive Klauseln</u>.

(c) Eine aussagenlogische Formel ist in <u>Konjunktiver Normalform</u> (<u>KNF</u>), wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, d.h. wenn sie die Gestalt

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} l_{ij} \right)$$

hat, wobei $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}_{>0}$ und l_{ij} ein Literal ist (für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m_i\}$).

Die Teilformeln $\mathcal{K}_i := \bigvee_{j=1}^{m_i} l_{ij}$ (für $i \in \{1, \dots, n\}$) heißen <u>disjunktive Klauseln</u>.

Normalformen spielen in vielen Anwendungsgebieten eine wichtige Rolle. Beispielsweise geht man in der Schaltungstechnik (Hardware-Entwurf) oft von DNF-Formeln aus, während bei der aussagenlogischen Modellbildung oftmals KNF-Formeln auftreten, da sich eine Sammlung von einfach strukturierten Aussagen sehr gut durch eine Konjunktion von Klauseln ausdrücken lässt.

<u>Satz 3.29:</u>
Für jede aussagenlogische Formel φ gibt es eine Formel ψ_D in DNF und eine Formel ψ_K in KNF, so dass $\varphi \equiv \psi_D \equiv \psi_K$

(D.h.: Jede Formel ist äquivalent zu einer Formel in DNF und zu einer Formel in KNF.)

<u>Beweisidee:</u>

- Zur Konstruktion einer zu φ äquivalenten Formel ψ_D in DNF stellen wir zunächst die

Wahrheitstafel für φ auf. Falls diese in der mit "φ" beschrifteten Spalte nur Nullen hat (dh. φ ist unerfüllbar), so setzen wir $\psi_D := (V_0 \wedge \neg V_0)$ — offensichtlich ist ψ_D in DNF und unerfüllbar, also äquivalent zu φ).

Falls die mit "φ" beschriftete Spalte der Wahrheitstafel mindestens eine 1 enthält, so gehen wir wie in Beispiel 3.27 vor, um eine zu φ äquivalente Formel ψ_D in DNF zu konstruieren.

- Zur Konstruktion einer zu φ äquivalenten Formel ψ_K in KNF können wir folgendermaßen vorgehen:

1) Sei $\varphi' := \neg\varphi$

2) Konstruiere eine zu φ' äquivalente Formel ψ'_D in DNF

   Sei $\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{i,j} \right)$ die Gestalt von ψ'_D.

3) Für alle i, j sei $\tilde{l}_{i,j} := \begin{cases} \neg X & \text{falls } l_{i,j} = X \text{ für ein } X \in AVAR \\ X & \text{falls } l_{i,j} = \neg X \text{ für ein } X \in AVAR \end{cases}$

4) setze $\psi_K := \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} \tilde{l}_{i,j} \right)$.

Offensichtlich ist ψ_K eine Formel in KNF.

Außerdem gilt:

$$
\begin{aligned}
\varphi &\equiv \neg \varphi' \\
&\equiv \neg \psi_D' \\
&\equiv \neg \left(\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{i,j} \right) \right) \\
&\underset{\substack{\text{Satz 3.25 (7)} \\ \text{"De Morgan"}}}{\equiv} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \neg \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{i,j} \right) \right) \\
&\underset{\substack{\text{Satz 3.25 (7)} \\ \text{"De Morgan"}}}{\equiv} \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} \neg l_{i,j} \right) \\
&\underset{\text{Def. } \tilde{l}_{i,j}}{\equiv} \underbrace{\bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} \tilde{l}_{i,j} \right)}_{\overset{\text{Def}}{=} \psi_K}
\end{aligned}
$$

$\square$

Abgesehen von DNF und KNF gibt es noch eine weitere wichtige Normalform, die so genannte Negationsnormalform:

<u>Definition 3.30</u>

Eine aussagenlogische Formel ist in <u>Negationsnormalform</u>, (<u>NNF</u>), wenn sie keins der Symbole $\rightarrow, \leftrightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}$ enthält und Negationszeichen nur unmittelbar vor Variablen auftreten.

Rekursiv lässt sich die Menge der Formeln in NNF folgendermaßen definieren:

<u>Basisregeln</u>: Für jedes $X \in AVAR$ ist sowohl X als auch $\neg X$ eine Formel in NNF

<u>Rekursive Regeln</u>: Sind φ und ψ Formeln in NNF, so sind auch $(\varphi \wedge \psi)$ und $(\varphi \vee \psi)$ Formeln in NNF.

<u>Beobachtung 3.31</u>:

Jede Formel, die in KNF oder in DNF ist, ist auch in NNF. Aus Satz 3.29 folgt also insbesondere, dass jede aussagenlogische Formel äquivalent zu einer Formel in NNF ist.

<u>Beachte</u>: Nicht jede Formel in NNF ist auch in KNF oder in DNF,
<u>Beispiel</u>: $(((X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)) \wedge \neg Z)$ ist in NNF, aber weder in KNF noch in DNF.

Ein einfaches Verfahren zur Transformation einer gegebenen aussagenlogischen Formel in eine äquivalente Formel in NNF beruht auf der wiederholten Anwendung der De Morganschen Regeln (Satz 3.25 (7)) und der Regel für "doppelte Negation" (Satz 3.25 (6)):

Mit den De Morganschen Regeln ($\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ bzw. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$) ziehen wir das

Negationszeichen nach innen; mit der "doppelte Negation"-Regel $(\neg\neg\varphi \equiv \varphi)$ können wir Schritt für Schritt mehrfach hintereinander vorkommende Negationszeichen eliminieren. Eventuell in der Formel vorkommende Implikationspfeile "$\rightarrow$" oder Biimplikationspfeile "$\leftrightarrow$" eliminieren wir durch Verwenden von Satz 3.25 (11) und (12).

Eventuelle Vorkommen der Symbole **0** bzw **1** ersetzen wir durch die Formel $(V_0 \wedge \neg V_0)$ bzw. $(V_0 \vee \neg V_0)$.

<u>Beispiel 3.32</u>

<u>Ziel</u>: Bringe die Formel $\Big(\big(\neg V_0 \wedge \neg((V_0 \vee V_1) \rightarrow V_0)\big) \rightarrow 0\Big)$ in NNF, d.h. finde eine zur gegebenen Formel äquivalente Formel in NNF

<u>Lösung</u>:

$$\Big(\big(\neg V_0 \wedge \neg((V_0 \vee V_1) \rightarrow V_0)\big) \rightarrow 0\Big)$$

$$\equiv \Big(\big(\neg V_0 \wedge \neg((V_0 \vee V_1) \rightarrow V_0)\big) \rightarrow (V_0 \wedge \neg V_0)\Big)$$

$$\equiv \Big(\neg\big(\neg V_0 \wedge \neg((V_0 \vee V_1) \rightarrow V_0)\big) \vee (V_0 \wedge \neg V_0)\Big)$$

$$\equiv \Big(\neg\big(\neg V_0 \wedge \neg(\neg(V_0 \vee V_1) \vee V_0)\big) \vee (V_0 \wedge \neg V_0)\Big)$$

$$\equiv \Big(\big(\neg\neg V_0 \vee \neg\neg(\neg(V_0 \vee V_1) \vee V_0)\big) \vee (V_0 \wedge \neg V_0)\Big)$$

$$\equiv \Big(\big(V_0 \vee (\neg(V_0 \vee V_1) \vee V_0)\big) \vee (V_0 \wedge \neg V_0)\Big)$$

$$\equiv \Big(\big(V_0 \vee ((\neg V_0 \wedge \neg V_1) \vee V_0)\big) \vee (V_0 \wedge \neg V_0)\Big) \quad \text{in NNF}$$

Unter zusätzlicher Verwendung der "Distributivitätsregel" (Satz 3.25 (5)) erhält man Verfahren zur Transformation einer gegebenen Formel in eine äquivalente Formel in DNF bzw KNF, bei denen man nicht zuerst eine Wahrheitstafel aufstellen muss. Diese Verfahren sind vor allem dann ratsam, wenn die gegebene Formel sehr viele verschiedene Variablen enthält, die zugehörige Wahrheitstafel also sehr groß wird.

<u>Algorithmus 3.33</u> (Ein KNF-Algorithmus)

<u>Eingabe</u>: Eine aussagenlogische Formel φ

<u>Ausgabe</u>: Eine zu φ äquivalente Formel φ' in KNF

<u>Verfahren</u>:

1) Konstruiere eine zu φ äquivalente Formel φ' in NNF (beispielsweise mit dem in Beobachtung 3.31 beschriebenen Verfahren)

2) Wiederhole folgende Schritte:

3) Falls φ' in KNF ist, so halte mit Ausgabe φ'

4) Ersetze eine Teilformel von φ' der Gestalt $(\psi_1 \vee (\psi_2 \wedge \psi_3))$ durch $((\psi_1 \vee \psi_2) \wedge (\psi_1 \vee \psi_3))$ oder ersetze eine Teilformel von φ' der Gestalt $((\psi_2 \wedge \psi_3) \vee \psi_1)$ durch $((\psi_2 \vee \psi_1) \wedge (\psi_3 \vee \psi_1))$. Sei φ'' die resultierende Formel

5) Setze $\varphi' := \varphi''$