2.3 Beweise verstehen und selbst formulieren

Ziel dieses Abschnitts ist, einen kurzen Überblick über grundlegende Beweistechniken zu geben, insbesondere:

- direkter Beweis
- Beweis durch Kontraposition
- Beweis durch Widerspruch (indirekter Beweis)
- vollständige Induktion.

Was sind "Sätze" und "Beweise"?

Ein Satz (bzw. Theorem) besteht aus Voraussetzungen und einer Behauptung. Voraussetzungen und Behauptung sind Aussagen, so dass folgendes gilt: Wenn alle Voraussetzungen erfüllt sind, dann muss auch die Behauptung wahr sein.

Der Beweis eines Satzes muss nachweisen, dass die Behauptung des Satzes wahr ist und kann dabei verwenden:

- die Voraussetzungen des Satzes
- Definitionen und bereits bekannte Tatsachen und Sätze
- im Beweis selbst oder anderswo bereits als wahr bewiesene Aussagen
- logische Schlussregeln.

Typische Fehler, die man beim Versuch, Beweise zu formulieren, vermeiden sollte, sind:

- unzulässiges Argumentieren mit Beispielen
- Verwendung gleicher Symbole zur Bezeichnung verschiedener Dinge
- Hantieren mit nicht exakt oder gar widersprüchlich definierten Begriffsbildungen
- unzulässige Gedankensprünge beim Schlussfolgern
- Ausnützung von bis dahin noch unbewiesenen Behauptungen zur Begründung von einzelnen Beweisschritten.

Beweistechnik "direkter Beweis":

Ansatz: die Behauptung eines Satzes wird "direkt" (dh "ohne Umwege") bewiesen.

Beispiele für direkte Beweise haben wir in dieser Vorlesung bereits kennengelernt, z.B.

- der Beweis von Satz 2.6
- der Beweis von Satz 2.15
- der Beweis von Satz 2.31
- der Beweis von Folgerung 2.32

Beweistechnik "Beweis durch Kontraposition"

Beim Beweis durch Kontraposition wird ein Satz der Form "Falls Aussage A gilt, so gilt auch Aussage B" dadurch bewiesen, dass man zeigt: "Falls Aussage B <u>nicht</u> gilt, so kann auch Aussage A <u>nicht</u> gelten".

Als Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition betrachten wir folgenden Satz:

Satz 2.37

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls n^2 eine ungerade Zahl ist, so ist auch n eine ungerade Zahl

Beweis: Durch Kontraposition.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Wir zeigen: Falls n keine ungerade Zahl ist, so ist auch n^2 keine ungerade Zahl.

$n \in \mathbb{N}$ war beliebig gewählt. Falls n ungerade ist, so ist nichts weiter zu beweisen. Wir betrachten daher nun den Fall, dass n nicht ungerade ist (d.h. n ist gerade). und zeigen, dass dann auch n^2 gerade ist.

Beachte: Per Definition ist eine natürliche Zahl m genau dann gerade, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt s.d. $m = 2 \cdot k$.

Daher gilt:

n ist gerade

$\Rightarrow$ es ex. $k \in \mathbb{N}$ s.d. $n = 2 \cdot k$ (gemäß Def. von "gerade")

$\Rightarrow$ es ex. $k \in \mathbb{N}$ s.d. $n^2 = n \cdot (2 \cdot k)$

$\Rightarrow$ es ex $k \in \mathbb{N}$ s.d. $n^2 = 2 \cdot (n \cdot k)$

$\Rightarrow$ es ex $k' \in \mathbb{N}$ s.d. $n^2 = 2 \cdot k'$

$\Rightarrow$ n^2 ist gerade (gemäß Def. von "gerade")

Somit ist n^2 gerade, dh n^2 ist keine ungerade Zahl.

$\square$

Beweistechnik "Beweis durch Widerspruch" (indirekter Beweis)

Beim Beweis durch Widerspruch wird ein Satz der Form "Falls die Voraussetzungen A erfüllt sind, so gilt Aussage B" dadurch bewiesen, dass man

- annimmt, dass die Voraussetzungen A erfüllt sind, aber die Aussage B <u>nicht</u> gilt, und
- daraus einen Widerspruch herleitet.

Als Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch betrachten wir folgenden Satz:

<u>Satz 2.38</u>
Für alle geraden natürlichen Zahlen a und b gilt: $a \cdot b$ ist gerade.

<u>Beweis</u>: Durch Widerspruch
Angenommen, a und b sind gerade natürliche Zahlen, so dass $a \cdot b$ <u>nicht</u> gerade ist.
Da a und b gerade sind, gibt es $k, \ell \in \mathbb{N}$ s.d.
$a = 2 \cdot k$ und $b = 2 \cdot \ell$.
Dann ist $a \cdot b = (2 \cdot k) \cdot (2 \cdot \ell) = 2 \cdot (2 \cdot k \cdot \ell)$.
Insbes. gibt es also ein $k' \in \mathbb{N}$ s.d. $a \cdot b = 2 \cdot k'$.
Gemäß der Definition von "gerade" ist also $a \cdot b$ gerade.
Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $a \cdot b$ <u>nicht</u> gerade ist.

$\square$

Ein weiteres, etwas anspruchsvolleres Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch ist der Beweis des folgenden Satzes, der "anschaulich" besagt, dass die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ <u>viel</u> größer ist als die Menge $\mathbb{N}$ selbst.

<u>Satz 2.39:</u> ("$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist nicht abzählbar")

Es gibt keine surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

<u>Beweis:</u> Durch Widerspruch.

Angenommen, $f: \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist surjektiv.

Sei $M := \{ n \in \mathbb{N} : n \notin f(n) \}$. $\quad$ $\underline{(*)}$

Klar: $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Da f surjektiv ist, muss es ein $m \in \mathbb{N}$ geben mit $f(m) = M$.

Klar: Entweder gilt $m \in M$ oder es gilt $m \notin M$.

<u>Fall 1: $m \notin M$:</u> Wegen $f(m) = M$ gilt also: $m \notin f(m)$.

Gemäß $\underline{(*)}$ für $n := m$ gilt also $m \in M$.

$\lightning$ (<u>Wid.</u> zu "Fall 1: $m \notin M$").

<u>Fall 2: $m \in M$:</u> Wegen $f(m) = M$ gilt also: $m \in f(m)$.

Gemäß $\underline{(*)}$ für $n := m$ gilt also $m \notin M$.

$\lightning$ (<u>Wid.</u> zu "Fall 2: $m \in M$").

Somit führen beide Fälle zu einem Widerspruch.

Daher kann es keine surjektive Funktion f von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ geben.

$\square$

Ein weiteres, sehr ähnliches Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch haben wir bereits im Zusammenhang mit der Russellschen Antinomie kennengelernt:

<u>Satz 2.40</u> ("Es gibt keine Menge aller Mengen")

Es gibt keine Menge U, so dass für jede Menge M gilt: $M \in U$.

<u>Beweis</u>: Durch Widerspruch. Angenommen, U ist eine Menge, so dass für jede Menge M gilt: $M \in U$.

Dann ist auch

(*) $\quad N := \{ M \in U : M \text{ ist eine Menge und } M \notin M \}$

eine Menge.

Insbesondere gilt entweder $N \in N$ oder $N \notin N$.

<u>Fall 1: $N \notin N$</u>: Wir wissen: N ist eine Menge, also insbes. $N \in U$. Und da wir in Fall 1 sind, gilt außerdem: $N \notin N$. Gemäß (*) (für $M := N$) muss dann aber gelten: $N \in N$ ↯ (Wid. zu "Fall 1: $N \notin N$")

<u>Fall 2: $N \in N$</u>: Wegen $N \in N$ gilt gemäß (*) für $M := N$, dass $N \in U$ ist, dass N eine Menge ist, und dass $N \notin N$ ist. ↯ (Wid. zu "Fall 2: $N \in N$")

Somit führen beide Fälle zu einem Widerspruch.

Daher kann es keine Menge U geben, so dass für jede Menge M gilt: $M \in U$.

□

Beweistechnik "Beweis durch vollständige Induktion"

Grundidee der vollständigen Induktion:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage über die natürliche Zahl n.

Ziel: Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr ist.

Eine Möglichkeit, dies zu zeigen ist, sich das so genannte Induktionsprinzip zu Nutze zu machen.

Induktionsprinzip:

Man zeigt, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, indem man folgendermaßen vorgeht:

(1) Zuerst zeigt man, dass die Aussage $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.
Diesen Schritt nennt man "Induktionsanfang" bzw. "Induktionsbasis".

(2) Danach zeigt man, dass für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:
Falls die Aussage $A(n)$ wahr ist, so ist auch die Aussage $A(n+1)$ wahr.
Diesen Schritt nennt man "Induktionsschritt".

Beachte: Wenn man die Schritte (1) und (2) bewiesen hat, so weiß man, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktions-} \\ \text{anfang}}}{A(0)}, \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktions-} \\ \text{schritt} \\ \text{für } n=0}}{A(1)}, \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktions-} \\ \text{schritt} \\ \text{für } n=1}}{A(2)}, \quad A(3), \quad A(4), \ldots$$

dh, man hat gezeigt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr ist.

Beispiel für einen Beweis durch vollständige Induktion:

Satz 2.41:

F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

(Bemerkung: Die "Aussage $A(n)$", deren Gültigkeit hier f.a. $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden soll, besagt also: "$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$".

Zur Erinnerung: $\sum_{i=0}^{n} 2^i$ ist eine abkürzende Schreibweise für $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n$.)

<u>Beweis:</u> Per Induktion nach n.

<u>Induktionsanfang: $n=0$:</u>

<u>Behauptung:</u> $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^{0+1} - 1$.

<u>Beweis:</u> • $\sum_{i=0}^{0} 2^i \underset{\text{Def.}\Sigma}{=} 2^0 = 1$

• $2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$

Also: $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 1 = 2^{0+1} - 1$. ✓

<u>Induktionsschritt: $n \to n+1$:</u> Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

<u>Induktionsannahme:</u> $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

(dh wir gehen davon aus, dass die Aussage $A(n)$ wahr ist)

<u>Behauptung:</u> $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{(n+1)+1} - 1$

(d.h. wir müssen zeigen, dass dann auch die Aussage $A(n+1)$ wahr ist).

<u>Beweis:</u>

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i \underset{\text{Def}\,\Sigma}{=} \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i\right) + 2^{n+1}$$

$$\underset{\text{Induktionsannahme}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1} - 1$$

$$= 2^{n+2} - 1$$

$$= 2^{(n+1)+1} - 1. \quad ✓$$

$\square$

Zwei nützliche Varianten des Induktionsprinzips

Um zu zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr ist (wobei n_0 eine geeignete natürliche Zahl ist), kann man nach einem der beiden folgenden Schemata vorgehen:

Variante 1:

Induktionsanfang: $n = n_0$:

Behauptung: die Aussage $A(n_0)$ ist wahr

Beweis: ...

Induktionsschritt: $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ beliebig.

Induktionsannahme: die Aussage $A(n)$ ist wahr

Behauptung: die Aussage $A(n+1)$ ist wahr

Beweis: ...

Variante 2:

Induktionsanfang: $n = n_0$:

Behauptung: die Aussage $A(n_0)$ ist wahr

Beweis: ...

Induktionsschritt: $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ beliebig.

Induktionsannahme: die Aussagen $A(n_0), A(n_0+1), \ldots, A(n)$ sind wahr.

Behauptung: die Aussage $A(n+1)$ ist wahr

Beweis: ...

Beispiel 2.42:

Welche der Funktionen $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ und $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(n) := n^2 - 7$ und $g(n) := 4 \cdot n$ (f.a. $n \in \mathbb{N}$) liefert größere Funktionswerte?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	-7	-6	-3	2	9	18	29	42	57	74
$g(n)$	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36

<u>Vermutung</u>: F.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ gilt: $f(n) > g(n)$.

<u>Beweis</u>: per Induktion nach n.

<u>Induktionsanfang: $n = 6$</u>

<u>Behauptung</u>: $f(6) > g(6)$

<u>Beweis</u>:
- $f(6) = 6^2 - 7 = 29$
- $g(6) = 4 \cdot 6 = 20$

Also: $f(6) = 29 > 20 = g(6)$. ✓

<u>Induktionsschritt: $n \to n+1$</u>: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ beliebig.

<u>Induktionsannahme</u>: $f(n) > g(n)$, d.h. $n^2 - 7 > 4 \cdot n$

<u>Behauptung</u>: $f(n+1) > g(n+1)$, d.h. $(n+1)^2 - 7 > 4 \cdot (n+1)$

<u>Beweis</u>:
$$\begin{aligned}(n+1)^2 - 7 &= n^2 + 2n + 1 - 7 \\ &= (n^2 - 7) + 2n + 1 \\ &\underset{\text{Ind.ann.}}{>} 4 \cdot n + 2n + 1 \\ &\underset{n \geq 6,\ \text{also } 2n+1 \geq 13 > 4}{\geq} 4 \cdot n + 4 \geq 4 \cdot (n+1).\end{aligned}$$

□

Auf ähnliche Weise kann man per Induktion auch folgendes beweisen:

<u>Satz 2.43</u>

(<u>a</u>) F.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

(<u>b</u>) F.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

(d.h.: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ergibt gerade die Zahl n^2).

(<u>c</u>) F.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

<u>Beweis:</u> Übung.

Das folgende Beispiel zeigt, dass man beim Führen von Induktionsbeweisen vorsichtig bzw. sehr sorgfältig sein sollte:

Beispiel 2.44

Der folgende Satz ist offensichtlicherweise nicht wahr – aber wo steckt der Fehler im Beweis?

"Satz": F.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:
Ist M eine Menge von Menschen mit $|M| = n$, so haben alle Menschen in M die gleiche Größe.

"Beweis": per Induktion nach n.

Induktionsanfang: $n = 1$.

Behauptung: Ist M eine Menge von Menschen mit $|M| = 1$, so haben alle Menschen in M die gleiche Größe.

Beweis: Sei M eine Menge von Menschen mit $|M| = 1$. Dh, M besteht aus genau einem Menschen. Daher haben offensichtlich alle Menschen in M die gleiche Größe.

Induktionsschritt: $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ beliebig.

Induktionsannahme: Ist M' eine Menge von Menschen mit $|M'| = n$, so haben alle Menschen in M' die gleiche Größe.

Behauptung: Ist M eine Menge von Menschen mit $|M| = n+1$, so haben alle Menschen in M die gleiche Größe.

<u>Beweis:</u> Sei M eine Menge von Menschen mit $|M| = n+1$.

Sei $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ eine Liste aller Menschen in M, d.h. $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$.

Sei $M' := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

und $M'' := \{a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$

Offensichtlich sind M' und M'' Mengen von Menschen mit $|M'| = n$ und $|M''| = n$.

Gemäß der Induktionsannahme gilt daher:

(1) Alle Menschen in M' haben die gleiche Größe, und

(2) alle Menschen in M'' haben die gleiche Größe.

Sei g' die Größe, die gemäß (1) jeder Mensch in M' hat, und sei g'' die Größe, die gemäß (2) jeder Mensch in M'' hat.

Laut Definition von M' und M'' gilt:

$a_2 \in M'$ und $a_2 \in M''$. Da jeder einzelne Mensch (und daher insbes. der Mensch a_2) nur eine Größe haben kann, gilt: $g' = g''$.

Wegen $M = M' \cup M''$ gilt daher, dass alle Menschen in M die gleiche Größe haben, nämlich die Größe $g := g' = g''$.

$\square$

<u>Frage:</u> Wo steckt der Fehler im Beweis?

Antwort:

Der "Induktionsschritt $n \to n+1$" ist für den Wert $n = 1$ nicht schlüssig, denn in diesem Fall gilt $n+1 = 2$ und

- $M = \{a_1, a_2\}$
- $M' = \{a_1\}$
- $M'' = \{a_2\}$

Insbes gilt also zwar, dass $a_2 \in M''$, aber es gilt nicht, dass $a_2 \in M'$!

□ Ende von Bsp 2.44

2.4 Rekursive Definitionen von Funktionen und Mengen

Das Induktionsprinzip lässt sich auch zur "induktiven" (bzw. "rekursiven") Definition von Funktionen $f: \mathbb{N} \to M$ (wobei M eine beliebige Menge ist) nutzen, indem man folgendermaßen vorgeht:

(1): Definiere $f(0)$ ("Rekursionsanfang")

(2): Definiere, f.a. $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1)$ unter Verwendung des Werts $f(n)$ (bzw unter Verwendung der Werte $f(n), f(n-1), \dots, f(1), f(0)$) ("Rekursionsschritt")

Auch hier ist wieder eine Reihe von Varianten möglich.

<u>Beispiel 2.45</u>:

(a) Rekursive Definition der <u>Fakultätsfunktion</u>

$fak: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch:

- $fak(0) := 1$
- $fak(n+1) := (n+1) \cdot fak(n)$ (f.a. $n \in \mathbb{N}$)

<u>Beachte</u>: $fak(4) = 4 \cdot fak(3) = 4 \cdot 3 \cdot fak(2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot fak(1)$
$= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot fak(0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$

Allgemein gilt f.a. $n \in \mathbb{N}_{>0}$:

$$fak(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$$

<u>Notation</u>: $n! := fak(n)$.

(b) Rekursive Definition der so genannten <u>Fibonacci-Folge</u> $fib : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

- $fib(0) := 0$
- $fib(1) := 1$
- $fib(n+1) := fib(n) + fib(n-1)$ f.a. $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Somit:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$fib(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Um Aussagen über rekursiv definierte Funktionen zu beweisen, kann man wieder das Induktionsprinzip nutzen. Beispiel:

<u>Satz 2.46</u>:

Sei $fib : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Fibonacci-Folge.
Dann gilt f.a. $n \in \mathbb{N}$: $fib(n) \leq 2^n$.

<u>Beweis</u>: per Induktion nach n.

<u>Induktionsanfang</u>: betrachte $n=0$ und $n=1$.

<u>Behauptung</u>: $fib(0) \leq 2^0$ und $fib(1) \leq 2^1$.

<u>Beweis</u>: $fib(0) \underset{Def.}{=} 0 \leq 1 = 2^0$ ✓, $fib(1) \underset{Def}{=} 1 \leq 2 = 2^1$. ✓

<u>Induktionsschritt</u>: $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ beliebig.

<u>Induktionsannahme</u>: f.a. $i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$ gilt: $fib(i) \leq 2^i$.

<u>Behauptung</u>: $fib(n+1) \leq 2^{n+1}$

<u>Beweis</u>:
$$fib(n+1) \underset{Def}{=} fib(n) + fib(n-1) \underset{Ind.ann.}{\leq} 2^n + 2^{n-1} \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}. \checkmark$$

□

Bemerkung 2.47

Es gibt auch eine "geschlossene Formel", mit der man den n-ten Wert der Fibonacci-Folge, d.h. die Zahl $fib(n)$ direkt ausrechnen kann, ohne dafür sämtliche Werte $fib(0), fib(1), \dots, fib(n-1)$ ausrechnen zu müssen:

F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$fib(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

Beweis: Übung (... per Induktion nach n).
(Details: siehe Buch von Meinel und Mundhenk)

Rekursive Definition von Mengen

Oft ist es nützlich, auch Mengen rekursiv (bzw induktiv) zu definieren.

Eine rekursive Definition einer Menge M besteht aus

(1) Basisregeln der Form "$m \in M$"

(dh die Basisregeln listen explizit bestimmte Elemente auf, die zur Menge M gehören)

(2) Rekursiven Regeln der Form:

"Wenn $m_1, \dots, m_k \in M$, dann $m \in M$",

wobei m von $m_1, \dots, m_k$ abhängt.

Die dadurch definierte Menge M ist dann die Menge aller Elemente, deren Zugehörigkeit zu M durch endlich-maliges Anwenden der Regeln gezeigt werden kann.

Beispiel 2.48: "Palindrome"

Betrachte das Alphabet $A := \{a, b\}$.

Die Menge $PAL \subseteq A^*$ sei wie folgt rekursiv definiert:

Basisregeln:
- $\varepsilon \in PAL$, (B1)
- $a \in PAL$, (B2)
- $b \in PAL$ (B3)

Rekursive Regeln:
- Ist $w \in PAL$, so ist auch $awa \in PAL$ (R1)
- Ist $w \in PAL$, so ist auch $bwb \in PAL$. (R2)

Beispiele für Worte, die zur Menge PAL gehören:

$\underbrace{\varepsilon, a, b}_{\text{durch Basisregeln}}$, $\underbrace{aa, bb}_{\text{durch rek. Regeln mit } w := \varepsilon}$, $\underbrace{aaa, bab}_{\text{durch rek. Regeln mit } w := a}$, $\underbrace{aba, bbb}_{\text{durch rek. Regeln mit } w := b}$

Es gilt beispielsweise auch: $aababaa \in PAL$

<u>Beweis:</u> $a \in PAL$ (Basisregel (B1))

Rek. Regel (R2) mit $w := a \Rightarrow bab \in PAL$.

Rek. Regel (R1) mit $w := bab \Rightarrow ababa \in PAL$.

Rek. Regel (R1) mit $w := ababa \Rightarrow aababaa \in PAL$. □

Aber beispielsweise $aab \notin PAL$, denn gemäß Basisregeln und rekursiven Regeln gilt für jedes Wort $w \in PAL$: der erste und der letzte Buchstabe von w sind identisch.

□ Bsp. 2.48

Induktionsprinzip für rekursiv definierte Mengen:

Sei M eine rekursiv definierte Menge.
Dass eine Aussage $A(m)$ für alle $m \in M$ wahr ist, kann man folgendermaßen zeigen:

(1) Zuerst betrachtet man nacheinander jede Basisregel der Form "$m \in M$" und zeigt, dass die Aussage $A(m)$ wahr ist. ("Induktionsanfang")

(2) Danach betrachtet man nacheinander jede rekursive Regel der Form
"Wenn $m_1, \dots, m_k \in M$, dann $m \in M$"
und zeigt folgendes: Wenn die Aussagen $A(m_1), \dots, A(m_k)$ wahr sind, dann ist auch die Aussage $A(m)$ wahr. ("Induktionsschritt")

Beachte: Wenn man die Schritte (1) und (2) bewiesen hat, so weiß man, dass die Aussage $A(m)$ für alle $m \in M$ wahr ist.

Beispiel 2.49:

Sei $A := \{a, b\}$.
Für jedes Wort $w \in A^*$ sei w^R das Wort, das durch "Rückwärtslesen" von w entsteht, dh:

- Ist $w = \varepsilon$, so ist $w^R = \varepsilon$
- Ist $w = w_1 \cdots w_k$ mit $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $w_1, \ldots, w_k \in A$, so ist $w^R := w_k \cdots w_1$.

(Bsp: $aaab^R = baaa$)

Sei PAL die in Beispiel 2.48 rekursiv definierte Teilmenge von A^*.

Behauptung 1: Für jedes Wort $w \in PAL$ gilt: $w = w^R$.

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von PAL.

Induktionsanfang: betrachte diejenigen Worte, die aufgrund von Basisregeln zur Menge PAL gehören:

Behauptung: $\varepsilon = \varepsilon^R$, $a = a^R$ und $b = b^R$

Beweis: Gemäß der Definition von w^R gilt offensichtlich, dass $\varepsilon = \varepsilon^R$, $a = a^R$ und $b = b^R$.

Induktionsschritt: betrachte die rekursiven Regeln:

- (R1):

  Sei $w \in PAL$ und sei $v := awa$.
  Nach (R1) ist damit auch $v \in PAL$.

  Induktionsannahme: $w = w^R$

  Behauptung: $v = v^R$

  Beweis: $v^R \underset{\text{Def } v}{=} (awa)^R \underset{\text{Def } (\cdot)^R}{=} aw^Ra \underset{\substack{\text{Ind.ann:} \\ w = w^R}}{=} awa \underset{\text{Def. } v}{=} v$. ✓

- (R2):

  Sei $w \in PAL$ und sei $v := bwb$.
  Nach (R2) ist damit auch $v \in PAL$.

  Induktionsannahme: $w = w^R$

  Behauptung: $v = v^R$

  Beweis: $v^R \underset{\text{Def } v}{=} (bwb)^R \underset{\text{Def } (\cdot)^R}{=} bw^Rb = bwb \underset{\text{Def } v}{=} v$. ✓

$\square$ Beh 1

Behauptung 2: Für jedes $w \in A^*$ mit $w = w^R$ gilt: $w \in PAL$.

Beweisansatz: Zeige folgende Aussage per Induktion nach n:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $w \in A^*$ mit $w = w^R$ und $|w| \leq n$, so gilt $w \in PAL$.

Im Induktionsanfang werden $n = 0$ und $n = 1$ betrachtet; im Induktionsschritt $n \to n+1$ werden alle $n \geq 1$ betrachtet.

Details: Übung

Aus Beh 1 und Beh 2 folgt: $PAL = \{w \in A^* : w = w^R\}$.