Definition 2.14':

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei M eine Menge.
Die <u>k-te Potenz von M</u> ist die Menge

$$M^k := \{ (m_1, \dots, m_k) : m_1 \in M, \dots, m_k \in M \}.$$

<u>Insbesondere</u>: $M^0 = \{()\}$ besteht aus genau einem Element, dem leeren Tupel.

(b) Das <u>kartesische Produkt</u> zweier Mengen M, N ist die Menge

$$M \times N := \{ (m,n) : m \in M, n \in N \}$$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $M_1, \dots, M_k$ Mengen.
Das kartesische Produkt von $M_1, \dots, M_k$ ist die Menge

$$M_1 \times \dots \times M_k := \{ (m_1, \dots, m_k) : m_1 \in M_1, \dots, m_k \in M_k \}.$$

<u>Beispiele</u>:

Sei $M = \{a,b\}$, $N = \{1,2,3\}$.

- $M \times N = \{ (a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3) \}$
- $M \times \{1\} = \{ (a,1), (b,1) \}$
- $M \times \emptyset = \emptyset$
- $M^2 = \{ (a,a), (a,b), (b,a), (b,b) \}$

- $M^1 = \{ (a), (b) \}$
- $M^0 = \{ () \}$
- $\emptyset^2 = \emptyset$
- $\emptyset^1 = \emptyset$
- $\emptyset^0 = \{ () \}$
- In Beispiel 2.1 hatten wir die Karten eines Skat-Kartenspiels durch folgende Wertebereiche modelliert:

  $$\text{KartenArten} = \{ \text{Kreuz}, \text{Pik}, \text{Herz}, \text{Karo} \}$$
  $$\text{KartenSymbole} = \{ 7, 8, 9, 10, \text{Bube}, \text{Dame}, \text{König}, \text{Ass} \}$$

  $$\text{Karten} = \text{KartenArten} \times \text{KartenSymbole}$$

- Uhrzeiten kann man repräsentieren durch Elemente der Menge

  $$\text{Uhrzeiten} := \text{Stunden} \times \text{Minuten} \times \text{Sekunden},$$

  wobei

  $$\text{Stunden} := \{ 0, 1, 2, \dots, 23 \}$$
  $$\text{Minuten} := \{ 0, 1, 2, \dots, 59 \}$$
  $$\text{Sekunden} := \{ 0, 1, 2, \dots, 59 \}$$

  Das Tupel $(9, 45, 00)$ repräsentiert dann die Uhrzeit "9 Uhr, 45 Minuten und 0 Sekunden" – dh den Beginn der Pause in der Vorlesung.

Die Mächtigkeit von kartesischen Produkten:

Satz 2.15:

(a) Seien M und N zwei endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M \times N| = |M| \cdot |N|$$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $M_1, \dots, M_k$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M_1 \times \dots \times M_k| = |M_1| \cdot \dots \cdot |M_k| = \prod_{i=1}^{k} |M_i|$$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei M eine endliche Menge. Dann gilt:

$$|M^k| = |M|^k.$$

Beweis:

(a) $$|M \times N| = \left| \dot{\bigcup}_{m \in M} (\{m\} \times N) \right| = \sum_{m \in M} |\{m\} \times N|$$

$$= \sum_{m \in M} |N| = \underbrace{|N| + \dots + |N|}_{|M|\text{-mal}} = |M| \cdot |N|$$

(b) analog.

(c) $$|M^k| = |\underbrace{M \times \dots \times M}_{k\text{-mal}}| \overset{(b)}{=} \underbrace{|M| \cdot \dots \cdot |M|}_{k\text{-mal}} = |M|^k.$$

$\square$

Worte bzw. endliche Folgen

Bemerkung 2.16:

Sei A eine Menge

- Gelegentlich fassen wir ein Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ als <u>Wort</u> auf, dessen "Buchstaben" $a_1, \dots, a_k$ sind. Um diese Sichtweise zu betonen, schreiben wir oft $a_1 \cdots a_k$ an Stelle von $(a_1, \dots, a_k)$

  <u>Beispiel</u>: Das Tupel (m, o, d, e, l, l) identifizieren wir mit dem Wort modell

- A ist dann das <u>Alphabet</u>, über dem die Worte gebildet werden, und $a_1 \cdots a_k$ wird "<u>Wort über A</u>" genannt.
- Das <u>leere Tupel</u> $() \in A^0$ heißt auch <u>leeres Wort</u> und wird oft mit ε (epsilon) bezeichnet.
- Die <u>Länge</u> eines Wortes $a_1 \cdots a_k$ ist die Zahl

  $$|a_1 \cdots a_k| := k.$$

  Insbesondere ist $|\varepsilon| = 0$, dh. das leere Wort hat die Länge 0.

- Sind $v = a_1 \cdots a_k$ und $w = b_1 \cdots b_\ell$ zwei Worte über A, so ist die <u>Konkatenation</u> von v und w das Wort

  $$vw := a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_\ell$$

- Manchmal wird ein Wort $a_1 \cdots a_k$ auch als <u>Folge</u> der Länge k aufgefasst.

Definition 2.17 (A^*, A^+, Sprache)

Sei A ein Alphabet (d.h. eine Menge).

(a) Die Menge aller Worte über A (von beliebiger endlicher Länge) bezeichnen wir mit A^*.

Es gilt also:

$$A^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^k = \{ a_1 \cdots a_k : k \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_k \in A \}.$$

Beachte: Wegen $0 \in \mathbb{N}$ und $A^0 = \{()\} = \{\varepsilon\}$ enthält A^* insbesondere das leere Wort.

(b) Die Menge aller nicht-leeren Worte über A (von beliebiger endlicher Länge) bezeichnen wir mit A^+.

Es gilt also:

$$A^+ = A^* \setminus \{\varepsilon\} = \{ a_1 \cdots a_k : k \in \mathbb{N}_{>0},\ a_1, \ldots, a_k \in A \}.$$

(c) Eine Sprache über A ist eine Teilmenge von A^*.

Bemerkung: In vielen Büchern werden Sprachen mit dem Buchstaben L (für Language) oder Varianten wie L' oder L_1 bezeichnet.

Beispiel 2.18 (Natürliche Sprachen)

Alphabet: $A_{deutsch} := \{A, B, \ldots, Z, Ä, Ö, Ü,$
$a, b, \ldots, z, ä, ö, ü, ß,$
$., ,, :, ;, !, ?, „, ", -, \_, \}$

Sprachen über $A_{deutsch}$:

- L_1 := Menge aller grammatikalisch korrekten Sätze der deutschen Sprache (aufgefasst als Zeichenketten über $A_{deutsch}$)
- L_2 := Menge aller Wörter der deutschen Sprache

Beispiel 2.19 (Programmiersprachen)

Alphabet: ASCII := Menge aller ASCII-Symbole

Sprachen:

- L_1 := Menge aller JAVA-Schlüsselwörter
- L_2 := Menge aller erlaubten Variablennamen in JAVA
- L_3 := Menge aller syntaktisch korrekten JAVA-Programme

Relationen

Relationen sind Teilmengen aus kartesischen Produkten.
Präzise:

Definition 2.20

(a) Seien M, N Mengen. Eine Relation von M nach N ist eine Teilmenge von $M \times N$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $M_1, \dots, M_k$ Mengen.
Eine Relation auf $M_1, \dots, M_k$ ist eine Teilmenge von $M_1 \times \dots \times M_k$. Die Stelligkeit einer solchen Relation ist k.

(c) Sei M eine Menge und sei $k \in \mathbb{N}$.
Eine k-stellige Relation über M ist eine Teilmenge von M^k.

Beispiel 2.21:

Um Datumsangaben im Format (Tag, Monat, Jahr) anzugeben, nutzen wir die Wertebereiche

$$\text{TagWerte} := \{1, 2, \dots, 31\}$$
$$\text{MonatsWerte} := \{1, 2, \dots, 12\}$$
$$\text{JahresWerte} := \mathbb{Z}$$

Die Menge "Gültig" aller gültigen Daten ist dann eine Teilmenge von TagWerte × MonatsWerte × JahresWerte, d.h. eine Relation auf TagWerte, MonatsWerte, JahresWerte, zu der beispielsweise das Tupel (24, 12, 2007) gehört, nicht aber das Tupel (30, 2, 2008).

Notation 2.22:

- Ist R eine Relation von M nach N (für zwei Mengen M, N), so schreiben wir oft

  $$mRn \quad \text{anstatt} \quad (m,n) \in R$$

  Beispiel: • $m \leq n$, für natürliche Zahlen m, n
  • $m \neq n$.

- Ist R eine Relation auf $M_1, \dots, M_k$, so schreiben wir manchmal

  $$R(m_1, \dots, m_k) \quad \text{anstatt} \quad (m_1, \dots, m_k) \in R.$$

Dies soll verdeutlichen, dass R eine "Eigenschaft" ist, die ein Tupel aus $M_1 \times \dots \times M_k$ haben kann — oder eben nicht haben kann.

Im Datums-Beispiel gilt:

$$\text{Gültig}(24, 12, 2007),$$

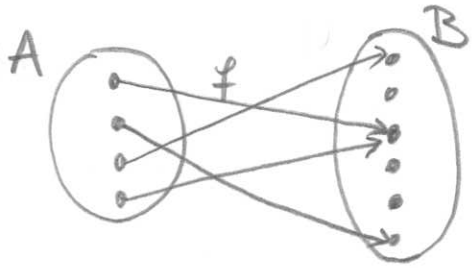
aber es gilt nicht: $\text{Gültig}(30, 2, 2008)$

Funktionen

Definition 2.23:

Seien A, B Mengen.
Eine <u>Funktion</u> (oder <u>Abbildung</u>) von A nach B ist eine Relation f von A nach B (dh $f \subseteq A \times B$) mit der Eigenschaft, dass für jedes $a \in A$ <u>genau ein</u> $b \in B$ mit $(a,b) \in f$ existiert.

<u>anschaulich</u>:



Notation 2.24:

(a) Wir schreiben $f: A \to B$, um auszudrücken, dass f eine Funktion von A nach B ist

(b) Ist $f: A \to B$ und ist $a \in A$, so bezeichnet $f(a)$ das (eindeutige) $b \in B$ mit $(a,b) \in f$.
Insbesondere schreiben wir meistens $f(a) = b$ an Stelle von $(a,b) \in f$.

(c) Für $f: A \to B$ und $A' \subseteq A$ sei

$$f(A') := \{ f(a) : a \in A' \}.$$

(d) Die Menge aller Funktionen von A nach B bezeichnen wir mit $\mathrm{Abb}(A, B)$.

Beachte: In manchen Büchern wird $\mathrm{Abb}(A,B)$ auch mit $A \to B$ oder mit B^A bezeichnet.

Bemerkung:
Zwei Funktionen $f: A \to B$ und $g: A \to B$ sind gleich (kurz: $f = g$), falls f.a. $a \in A$ gilt:
$f(a) = g(a)$.

Definition 2.25: (Definitionsbereich, Bildbereich, Bild)

Sei $f: A \to B$.
Der Definitionsbereich von f ist die Menge
$\mathrm{Def}(f) := A$
Der Bildbereich von f ist die Menge B.
Das Bild von f (genauer: das Bild von A unter f) ist die Menge
$\mathrm{Bild}(f) := f(A) \underset{\mathrm{Def}}{=} \{ f(a) : a \in A \} \subseteq B$.

Definition 2.26 (Restriktionen)

Sei $f: A \to B$ eine Funktion und sei $A' \subseteq A$.
Die Restriktion (oder Einschränkung) von f auf A' ist die Funktion

$$f_{|A'} : A' \to B \quad , \text{ die folgendermaßen}$$

definiert ist: f.a. $a \in A'$ ist $f_{|A'}(a) := f(a)$.

Partielle Funktionen

Definition 2.27

Eine partielle Funktion von einer Menge A in eine Menge B ist eine Funktion f mit $\mathrm{Def}(f) \subseteq A$ und $\mathrm{Bild}(f) \subseteq B$.

Bemerkung 2.28

(a) Im Gegensatz zu partiellen Funktionen nennt man Funktionen, wie wir sie in Definition 2.23 definiert haben, auch <u>totale Funktionen</u>.

Sprechen wir von "Funktionen", ohne sie explizit als "partiell" zu bezeichnen, so meinen wir in dieser Vorlesung immer "totale" Funktionen.

(b) Jede partielle Funktion von einer Menge A in eine Menge B lässt sich auch als totale Funktion von A nach $B \dot\cup \{\perp\}$ auffassen, wobei $\perp$ ein spezielles Zeichen ist, das für "undefiniert" steht (und das nicht zur Menge B gehört).

Eigenschaften von Funktionen

Definition 2.29:

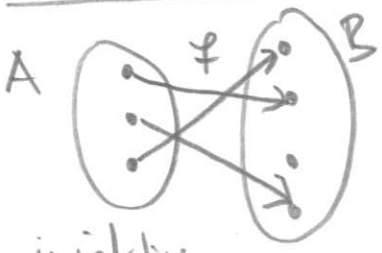
Sei $f: A \to B$.

(a) f heißt <u>injektiv</u>, falls es für jedes $b \in B$ höchstens ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.

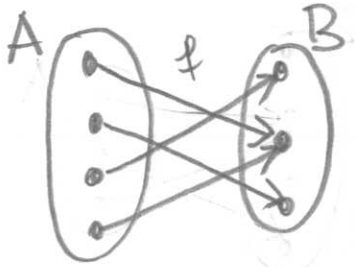
(b) f heißt <u>surjektiv</u>, falls es für jedes $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.

(c) f heißt <u>bijektiv</u>, falls es für jedes $b \in B$ genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.

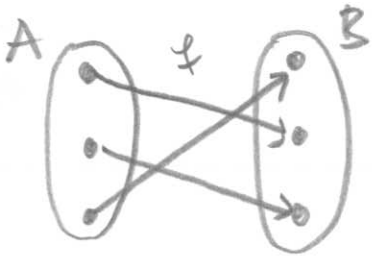
Anschaulich:



injektiv,
nicht surjektiv,
nicht bijektiv



nicht injektiv
surjektiv
nicht bijektiv



injektiv,
surjektiv,
bijektiv

Beobachtung 2.30:

(a) Für jede Funktion $f: A \to B$ gilt:

f ist bijektiv $\iff$ f ist injektiv und surjektiv.

(b) Seien A und B endliche Mengen. Dann gilt:

$|A| = |B|$ $\iff$ es gibt eine bijektive Funktion von A nach B.

Satz 2.31:

(a) Für jede Menge M gibt es eine bijektive Funktion von $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathrm{Abb}(M, \{0,1\})$

(b) Sei B eine Menge, sei A eine endliche Menge und sei $k := |A|$.
Dann gibt es eine bijektive Funktion von $\mathrm{Abb}(A, B)$ nach B^k.

Beweis: (a) Repräsentiere jedes $M' \in \mathcal{P}(M)$ (dh $M' \subseteq M$) durch die so genannte charakteristische Funktion $\chi_{M'}: M \to \{0,1\}$

mit $\chi_{M'}(m) := \begin{cases} 1 & \text{falls } m \in M' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (*)

Sei nun $f: \mathcal{P}(M) \to \mathrm{Abb}(M, \{0,1\})$ definiert durch

$$f(M') := \chi_{M'}, \quad \text{für jedes } M' \in \mathcal{P}(M) \qquad (**)$$

<u>Behauptung</u>: f ist bijektiv.

Wir zeigen dies in 2 Schritten (und nutzen Beobachtung 2.30(<u>a</u>)):

<u>Schritt 1: f ist injektiv:</u>

Seien $M', M'' \in \mathcal{P}(M)$ mit $f(M') = f(M'')$.

<u>Ziel</u>: Zeige, dass $M' = M''$.

Wegen $f(M') = f(M'')$ gilt gemäß (**), dass $\chi_{M'} = \chi_{M''}$.

D.h. f.a. $m \in M$ gilt $\chi_{M'}(m) = \chi_{M''}(m)$.

Gemäß (*) gilt daher f.a. $m \in M$, dass

$$m \in M' \iff m \in M''.$$

Somit ist $M' = M''$.

<u>Schritt 2: f ist surjektiv.</u>

Sei $h \in \mathrm{Abb}(M, \{0,1\})$, dh $h: M \to \{0,1\}$.

<u>Ziel</u>: Finde ein $M' \in \mathcal{P}(M)$ mit $f(M') = h$.

Wir wählen

$$M' := \{m \in M : h(m) = 1\}. \qquad \text{Klar: } M' \in \mathcal{P}(M).$$

Gemäß (*) gilt $\chi_{M'} = h$.

Gemäß (**) ist daher $f(M') = h$.

$\square$ Beweis von (a)

(b) Idee: Sei $a_1, \dots, a_k$ eine Liste aller Elemente in A. Repräsentiere jede Funktion $h \in Abb(A,B)$ durch das k-Tupel $t_h := (h(a_1), \dots, h(a_k))$. Rest: Übung! $\square$

Folgerung 2.32:

Seien A, B, M endliche Mengen. Dann gilt:

(a) $$|Abb(A,B)| = |B|^{|A|}$$

(b) $$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}.$$

Beweis:

(a) Gemäß Satz 2.31 (b) und Beobachtung 2.30 (b) gilt für $k := |A|$, dass

$$|Abb(A,B)| = |B^k|$$

Laut Satz 2.15 (c) ist $|B^k| = |B|^k$.

Somit: $|Abb(A,B)| = |B|^k \underset{\text{Def. } k}{=} |B|^{|A|}$.

(b) Gemäß Satz 2.31 (a) und Beobachtung 2.30 (b) ist

$$|\mathcal{P}(M)| = |Abb(M, \{0,1\})|$$

Gemäß (a) ist $|Abb(M, \{0,1\})| = |\{0,1\}|^{|M|} = 2^{|M|}$.

$\square$

Spezielle Funktionen:

Definition 2.33:
Die <u>Identitätsfunktion</u> auf einer Menge M ist die Funktion $id_M : M \to M$ mit

$$id_M(m) := m \quad , \text{ f.a. } m \in M.$$

Definition 2.34: (Multimenge, engl.: bag)
Eine <u>Multimenge über einer Menge M</u> ist eine Funktion $f : M \to \mathbb{N}$.

Mit solchen Funktionen kann man "Mengen" beschreiben, in denen einzelne Elemente mehrfach vorkommen können: Für jedes $m \in M$ gibt $f(m)$ an, wie oft m in der "Multimenge" vorkommt.

Beispiel 2.35: Ein Geldbeutel mit

- 3 1-cent-Münzen
- 0 2-cent-Münzen
- 0 5-cent-Münzen
- 2 10-cent-Münzen
- 4 20-cent-Münzen
- 1 50-cent-Münze
- 3 1-Euro-Münzen
- 2 2-Euro-Münzen

kann repräsentiert werden durch die Multimenge

Geldbeutelinhalt : MünzenArten $\to \mathbb{N}$,

wobei

$$\text{MünzenArten} := \{ 1c,\ 2c,\ 5c,\ 10c,\ 20c,\ 50c,\ 1€,\ 2€ \}$$

und

$$\text{GeldbeutelInhalt}(1c) := 3$$
$$\text{GeldbeutelInhalt}(2c) := 0$$
$$\text{GeldbeutelInhalt}(5c) := 0$$
$$\text{GeldbeutelInhalt}(10c) := 2$$
$$\text{GeldbeutelInhalt}(20c) := 4$$
$$\text{GeldbeutelInhalt}(50c) := 1$$
$$\text{GeldbeutelInhalt}(1€) := 3$$
$$\text{GeldbeutelInhalt}(2€) := 2.$$

<u>Bequemere Schreibweise:</u>

$$\text{GeldbeutelInhalt} := \{ (1c,3),\ (2c,0),\ (5c,0),\ (10c,2),\ (20c,4),\ (50c,1),\ (1€,3),\ (2€,2) \}$$

2.2 Ein Beispiel zur Modellierung mit Wertebereichen

Beispiel 2.36: "Arbeitskreise der EU"

In der EU-Kommission sollen drei Arbeitskreise gebildet werden. Dazu entsendet jede der Nationen Deutschland, Frankreich, Österreich und Spanien drei Delegierte. Die Arbeitskreise sollen so gebildet werden, dass in jedem Arbeitskreis jede Nation vertreten ist und dass es unter Berücksichtigung der Fremdsprachenkenntnisse der Delegierten in jedem Arbeitskreis eine gemeinsame Sprache gibt, die alle beherrschen.

Aufgabe: Es soll nur die Situation modelliert werden — ein Lösungsverfahren wird hier erst mal nicht gesucht.

Formale Modellierung:

- Menge der Nationen:

$$\text{Nationen} := \{D, F, Ö, S\},$$

wobei D für Deutschland, F für Frankreich, Ö für Österreich und S für Spanien steht

- Die Delegierten können wir repräsentieren als Paare, die aus einer Nation und einem Index aus $\{1,2,3\}$ bestehen, so dass beispielsweise die drei Delegierten aus Deutschland durch die Paare $(D,1)$, $(D,2)$ und $(D,3)$ modelliert werden.

Also:

$$\text{Delegierte} := \text{Nationen} \times \text{DelegiertenIndex},$$

wobei $\text{DelegiertenIndex} := \{1,2,3\}$

- Wir nutzen eine Funktion "spricht", die jedem Delegierten die Menge von Sprachen zuordnet, die er beherrscht. Formal:

$$\text{spricht} : \text{Delegierte} \longrightarrow \mathcal{P}(\text{Sprachen}),$$

wobei $\text{Sprachen} := \{\text{deutsch, französisch, spanisch, englisch, italienisch, chinesisch}, \ldots\}$

- Die drei Arbeitskreise bezeichnen wir mit AK1, AK2, AK3 und setzen

  Arbeitskreise := {AK1, AK2, AK3}

- Eine konkrete Besetzung der drei Arbeitskreise repräsentieren wir durch eine Funktion

  AK-Besetzung : Arbeitskreise → $\mathcal{P}$(Delegierte),

  die jedem der 3 Arbeitskreise die Menge der Delegierten zuordnet, die Mitglied des Arbeitskreises sind.

- Die Bedingung, dass jede Nation in jedem Arbeitskreis vertreten ist, lässt sich folgendermaßen formulieren:

  f.a. a ∈ Arbeitskreise ist Vertretene_Nationen_in_a = Nationen,

  wobei Vertretene_Nationen_in_a :=
  {n ∈ Nationen : es ex. ein i ∈ Delegiertenindex s.d. (n,i) ∈ AK-Besetzung(a)}

- Die Bedingung, dass es für jeden Arbeitskreis eine Sprache gibt, die alle Mitglieder des Arbeitskreises beherrschen, lässt sich folgendermaßen formulieren:

f.a. $a \in$ Arbeitskreise ist Gemeinsame_Sprachen_in_a $\neq \emptyset$,

wobei

Gemeinsame_Sprachen_in_a :=

$$\left\{ sp \in \text{Sprachen} : \begin{array}{l} \text{f.a. } d \in \text{AK-Besetzung}(a) \text{ ist} \\ sp \in \text{spricht}(d) \end{array} \right\}$$

□ Ende von Bsp 2.36