2. Modellierung mit Wertebereichen — mathematische Grundlagen und Beweistechniken

Mathematische Notationen

$:=$	Definition eines Wertes, z.B.: $x := 5$, $M := \{1,2,3\}$
$:\Leftrightarrow$	Definition einer Eigenschaft oder einer Schreibweise z.B.: $m \in M :\Leftrightarrow m$ ist Element von M
ex.	es gibt, es existiert
f.a.	für alle, für jedes
$\Rightarrow$	impliziert z.B.: Regen $\Rightarrow$ nasse Straße
$\Leftrightarrow$	genau dann wenn z.B.: Klausur bestanden $\Leftrightarrow$ $z \geq 50\%$
$\square$	markiert das Ende eines Beweises
s.d.	Abkürzung für "so, dass"

Modellierung und Wertebereiche

In der Modellierung von Systemen / Aufgaben / Problemen / Lösungen kommen Objekte unterschiedlicher Art und Zusammensetzung vor.

Für Teile des Modells wird angegeben, aus welchem Wertebereich sie stammen, aber manchmal offen gelassen, welchen konkreten Wert sie haben.

Beispiel: Gegeben 3 Karten aus einem Kartenspiel; welches ist die höchste Karte?

Ein Wertebereich ist eine Menge gleichartiger Werte. Wertebereiche werden aus Mengen und Strukturen darüber gebildet.

Beispiel 2.1: Modellierung der Karten eines (Skat)Kartenspiels

Wertebereich:

KartenArten := { Kreuz, Pik, Herz, Karo }

KartenSymbole := { 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass }

Karten := { (Kreuz, 7), (Kreuz, 8), ..., (Kreuz, Ass),
(Pik, 7), (Pik, 8), ..., (Pik, Ass),
(Herz, 7), (Herz, 8), ..., (Herz, Ass),
(Karo, 7), (Karo, 8), ..., (Karo, Ass) }

Übersicht über Begriffe, die in Kap 2 genauer betrachtet werden:

- Wertebereich: eine Menge gleichartiger Werte
- Grundlegender Kalkül: Mengenlehre – Mengen und Mengenoperationen
- Strukturen über Mengen zur Bildung von zusammengesetzten Wertebereichen:
  - Potenzmengen
  - Kartesische Produkte, Tupel
  - Relationen
  - Folgen, Wörter
  - Funktionen
- Verwendung dieses Kalküls
  - Modellierung von Strukturen und Zusammenhängen
  - Grundlage für alle anderen formalen Kalküle
  - abstrakte Grundlage für Typen in Programmiersprachen

Ziel von Kap 2 ist, diese Begriffe genauer zu betrachten und abgesehen davon einige wichtige mathematische Grundlagen und Beweistechniken zu erklären.

2.1 Mengen, Relationen und Funktionen

Was ist eine Menge?

Cantors naiver Mengenbegriff: (Georg Cantor, 1845 - 1918)

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche "Elemente der Menge M" genannt werden, zu einem Ganzen.

Notation: $m \in M :\Leftrightarrow m$ ist Element der Menge M

Die Russellsche Antinomie: (Bertrand Russell, 1872 - 1970)

Cantors Mengenbegriff ist problematisch und führt zu Widersprüchen.
Russel gab folgendes Beispiel:

Sei N die Menge aller Mengen M, die sich nicht selbst enthalten
(dh: $M \in N :\Leftrightarrow M$ ist eine Menge, für die gilt: $M \notin M$)

Frage: Enthält N sich selbst (dh gilt $N \in N$)?

klar: entweder gilt $N \in N$ oder es gilt $N \notin N$

Fall 1: $N \notin N$. Gemäß Definition der Menge N gilt dann, dass $N \in N$. Das ist ein Widerspruch.

Fall 2: $N \in N$. Gemäß Definition der Menge N gilt dann, dass $N \notin N$. Das ist ein Widerspruch

Somit führen beide Fälle zu einem Widerspruch, obwohl wir wissen, dass eigentlich genau einer der beiden Fälle zutreffen müsste.

$\Longrightarrow$ Irgendwas stimmt nicht mit Cantors naivem Mengenbegriff!

Um Russells Beispiel und den daraus resultierenden Widerspruch besser zu verstehen, betrachte man folgende Geschichte vom Barbier von Sonnenthal.

<u>Der Barbier von Sonnenthal</u>:

Im Städtchen Sonnenthal (in dem bekanntlich viele seltsame Dinge passieren) wohnt ein Barbier, der genau diejenigen männlichen Einwohner von Sonnenthal rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

<u>Frage</u>: Rasiert der Barbier sich selbst?

Um die Russellsche Antinomie zu vermeiden, muss man die Mengenlehre sehr vorsichtig axiomatisch aufbauen — dies sprengt allerdings den Rahmen dieser Vorlesung.

Sofern man sich der Problematik aber bewusst ist,

Kann man sie im "täglichen Gebrauch" von Mengen vermeiden. Wir arbeiten daher weiter mit einem naiven Mengenbegriff.

Beschreibung / Definition von Mengen

- durch Aufzählen der Elemente (extensional)

  z.B. $M_1 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
  $= \{0, 1, 2, \dots, 5\}$

- durch Angabe von charakteristischen Eigenschaften der Elemente der Menge (intensional)

  z.B. $M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \text{ ist gerade}\}$
  $= \{x \in M_1 : x \text{ ist gerade}$
  $= \{x : x \text{ ist eine natürliche Zahl und } x \text{ ist gerade und } 0 \leq x \leq 5\}$

Intensional lässt sich M_2 folgendermaßen beschreiben: $M_2 = \{0, 2, 4\}$

Oft schreibt man statt ":" auch "|" und statt "und" einfach ein "Komma",

also $M_2 = \{x \mid x \in M_1, x \text{ gerade}\}$

Vorsicht:

(a) $\{x : 0 \leq x \leq 5\}$ definiert nicht eindeutig eine Menge, weil nicht festgelegt ist, ob x beispielsweise eine ganze oder eine reelle Zahl ist

(b) $\{M : M \text{ ist eine Menge}, M \notin M\}$ führt zur Russellschen Antinomie

Fazit:

Um solche Probleme zu vermeiden, sollte man bei intensionalen Mengendefinitionen immer angeben, aus welcher anderen Menge die ausgewählten Elemente kommen sollen, also:

$$\{x \in M : x \text{ hat Eigenschaft(en) } E\},$$

wobei M eine Menge und E eine Eigenschaft oder eine Liste von Eigenschaften ist, die jedes einzelne Element aus M haben kann oder nicht.

Wichtige grundsätzliche Eigenschaften von Mengen:

- Alle Elemente einer Menge sind verschieden.
  Dh ein Wert ist entweder Element der Menge oder eben nicht – aber er kann nicht "mehrfach" in der Menge vorkommen

- Die Elemente einer Menge haben keine feste Reihenfolge.

- Dieselbe Menge kann auf verschiedene Weisen beschrieben werden, z.B.

$$\{1,2,3\} = \{1,2,2,3\} = \{2,1,3\}$$
$$= \{i : i \text{ ist eine ganze Zahl}, 0 < i \leq 3\}$$

Insbesondere können Mengen aus atomaren oder aus zusammengesetzten Elementen gebildet werden, und eine Menge kann auch verschiedenartige Elemente enthalten.

<u>Beispiel</u>: Die Menge $M := \{1, (\text{Pik}, 8), \{\text{rot}, \text{blau}\}, 5\}$

besteht aus 4 Elementen:
- den atomaren Werte 1 und 5
- dem Tupel (Pik, 8)
- der Menge {rot, blau}.

Notationen für bestimmte Zahlenmengen:

$\mathbb{N}$:= Menge der natürlichen Zahlen
$:= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_{>0}$:= Menge der positiven natürlichen Zahlen
$:= \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$:= Menge der ganzen Zahlen
$:= \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$:= Menge der rationalen Zahlen
$:= \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

$\mathbb{R}$:= Menge der reellen Zahlen

<u>Beobachtung</u>: Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält

<u>Definition 2.2</u>:
Die <u>leere Menge</u> ist die (eindeutig bestimmte) Menge, die keine(s) Element(e) enthält
Wir bezeichnen sie mit $\emptyset$.

□ Ende von Def. 2.2

Frage 2.3: Gibt es eine "Menge aller Mengen"?

Nein! Denn wäre $\mathcal{U}$ die Menge aller Mengen, so wäre auch $N := \{ M \in \mathcal{U} : M \notin M \}$ eine Menge. Dies führt aber wieder zur Russellschen Antinomie (da die Frage "Ist $N \in N$?" nicht geklärt werden kann).

Mengenalgebra

Definition 2.4 (Gleichheit von Mengen)

Zwei Mengen M und N sind gleich (kurz: $M = N$), falls sie dieselben Elemente enthalten, d.h. falls gilt:

- f.a. $x \in M$ gilt $x \in N$, und
- f.a. $x \in N$ gilt $x \in M$.

Beachte: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, denn $\emptyset$ ist die Menge, die keine Elemente enthält, während $\{\emptyset\}$ eine Menge ist, die ein Element (nämlich $\emptyset$) enthält.

Definition 2.5 (Teilmengen)

Seien M, N Mengen.

(a) M ist eine Teilmenge von N (kurz: $M \subseteq N$), wenn jedes Element von M auch ein Element von N ist.

(b) M ist eine echte Teilmenge von N (kurz: $M \subsetneq N$), wenn $M \subseteq N$ und $M \neq N$.

(c) M ist eine <u>Obermenge</u> von N (kurz: $M \supseteq N$), wenn $N \subseteq M$.

(d) M ist eine <u>echte</u> Obermenge von N (kurz: $M \supsetneq N$), wenn $M \supseteq N$ und $M \neq N$.

Satz 2.6

Seien M, N, P Mengen. Dann gilt:

(a) $M = N \iff M \subseteq N$ und $M \supseteq N$

(b) $M \subseteq N$ und $N \subseteq P \Rightarrow M \subseteq P$.

Beweis:

(a) $M = N \overset{\text{Def 2.4}}{\iff}$ M und N enthalten dieselben Elemente

$\overset{\text{Def 2.4}}{\iff}$ f.a. $x \in M$ gilt $x \in N$ und
f.a. $x \in N$ gilt $x \in M$

$\iff$ jedes Element von M ist auch ein Element von N und
jedes Element von N ist auch ein Element von M

$\overset{\text{Def 2.5(a)}}{\iff} M \subseteq N$ und $N \subseteq M$

$\underset{\text{Def 2.5(c)}}{\iff} M \subseteq N$ und $M \supseteq N$.

(b) Es gelte $M \subseteq N$ und $N \subseteq P$.

Behauptung: $M \subseteq P$, d.h. f.a. $m \in M$ gilt $m \in P$

Beweis: Sei $m \in M$ beliebig. Wir zeigen, dass $m \in P$.

$$m \in M \overset{\text{nach Vor: } M \subseteq N}{\Longrightarrow} m \in N \overset{\text{nach Vor: } N \subseteq P}{\Longrightarrow} m \in P.$$

$\square$

Definition 2.6:

Seien M und N Mengen.

(a) (Durchschnitt)

$$M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$$

(b) (Vereinigung)

$$M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$$

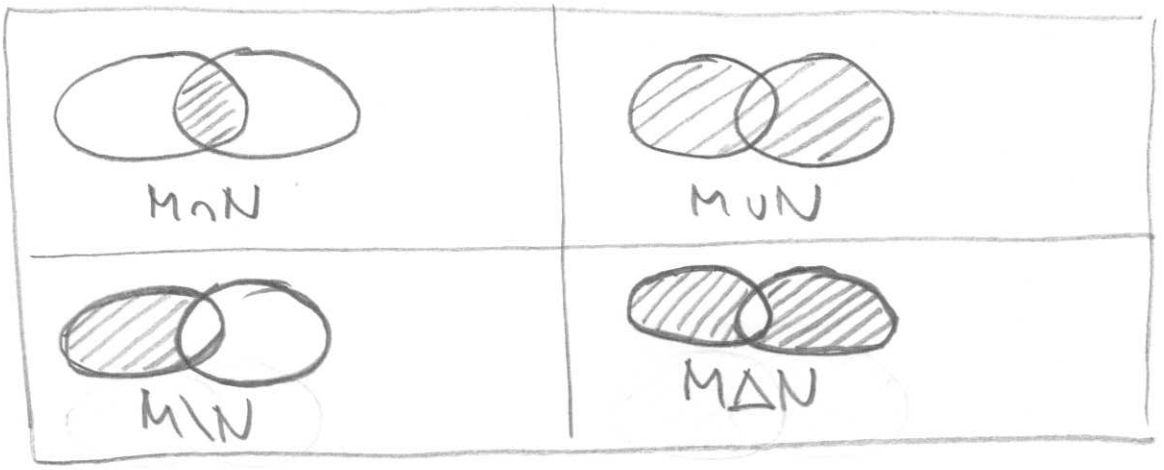
(c) (Differenz)

$$M \setminus N := M - N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$$

(d) (Symmetrische Differenz)

$$M \Delta N := (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$$

Veranschaulichung durch Venn Diagramme



Notation: Zwei Mengen M, N heißen disjunkt, falls $M \cap N = \emptyset$, dh falls sie keine gemeinsamen Elemente besitzen. Manchmal schreiben wir $M \dot{\cup} N$, um $M \cup N$ zu bezeichnen und gleichzeitig auszudrücken, dass $M \cap N = \emptyset$.

Rechenregeln für Durchschnitt und Vereinigung:

Satz 2.7:

Seien M, N, P Mengen. Dann gelten:

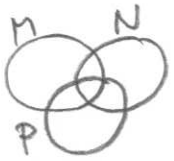
(a) (Idempotenz) $M \cap M = M$ und $M \cup M = M$

(b) (Kommutativität) $M \cap N = N \cap M$, $M \cup N = N \cup M$

(c) (Assoziativität) $M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap P$,
$M \cup (N \cup P) = (M \cup N) \cup P$

(d) (Absorption) $M \cap (M \cup N) = M$,
$M \cup (M \cap N) = M$

(e) (Distributivität) $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$,
$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$.

anschaulich: (c): 

(d): 

(e): 

Beweis:

(a) $M \cap M \overset{\text{Def 2.6(a)}}{=} \{x : x \in M \text{ und } x \in M\}$
$= \{x : x \in M\}$
$= M$

analog: $M \cup M = M$

(b) $M \cap N \overset{\text{Def 2.6(a)}}{=} \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$
$= \{x : x \in N \text{ und } x \in M\}$
$\overset{\text{Def 2.6(a)}}{=} N \cap M$

analog: $M \cup N = N \cup M$

(c) $M \cap (N \cap P) \overset{\text{Def 2.6'(a)}}{=} \{x : x \in M \text{ und } x \in N \cap P\}$

$\overset{\text{Def 2.6'(a)}}{=} \{x : x \in M \text{ und } (x \in N \text{ und } x \in P)\}$

$= \{x : (x \in M \text{ und } x \in N) \text{ und } x \in P\}$

$\overset{\text{Def 2.6'(a)}}{=} \{x : x \in M \cap N \text{ und } x \in P\}$

$\overset{\text{Def 2.6'(a)}}{=} (M \cap N) \cap P$

analog: $M \cup (N \cup P) = (M \cup N) \cup P$

(d) Wir beweisen, dass $M \cap (M \cup N) = M$ in 2 Schritten:

Schritt 1: Zeige, dass $M \subseteq M \cap (M \cup N)$

Schritt 2: Zeige, dass $M \cap (M \cup N) \subseteq M$

Aus Satz 2.5 (a) folgt dann, dass $M \cap (M \cup N) = M$.

<u>zu Schritt 1</u>: Behauptung: $M \subseteq M \cap (M \cup N)$, dh
f.a. $m \in M$ gilt $m \in M \cap (M \cup N)$

<u>Beweis</u>: Sei $m \in M$ beliebig. Zu zeigen: $m \in M \cap (M \cup N)$.
Wegen $m \in M$ gilt auch $m \in M \cup N$ (gemäß Def 2.6'(b)).
Wegen $m \in M$ und $m \in M \cup N$ gilt gemäß Def 2.6'(a),
dass $m \in M \cap (M \cup N)$ ✓

<u>zu Schritt 2</u>: Behauptung: $M \cap (M \cup N) \subseteq M$, dh
f.a. $m \in M \cap (M \cup N)$ gilt $m \in M$.

<u>Beweis</u>: Sei $m \in M \cap (M \cup N)$ beliebig. Zu zeigen: $m \in M$.
Wegen $m \in M \cap (M \cup N)$ gilt gemäß Def 2.6'(a), dass
$m \in M$ und $m \in M \cup N$. Insbesondere ist also $m \in M$ ✓

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass
$M \cap (M \cup N) = M$

analog: $M \cup (M \cap N) = M$

(e) analog (Details: Übung).

$\square$

<u>Komplemente</u>:

Das Komplement einer Menge M, kurz: $\overline{M}$ soll die Menge aller Elemente sein, die <u>nicht</u> zu M gehören. Bei der präzisen Definition von $\overline{M}$ ist allerdings wieder Vorsicht geboten, denn wenn wir einfach

$\overline{M} := \{x : x \notin M\}$ setzen, so gilt für die leere Menge $\emptyset$, dass ihr Komplement $\overline{\emptyset}$ einfach <u>alles</u> enthält — und dann wäre

$\{M : M \in \overline{\emptyset} \text{ und } M \text{ ist eine Menge}\}$

die "Menge aller Mengen" ... und dass es die nicht geben kann, haben wir in Frage 2.3 gesehen.

Daher betrachten wir Mengen stets innerhalb eines festen Universums U, das selber eine Menge ist.

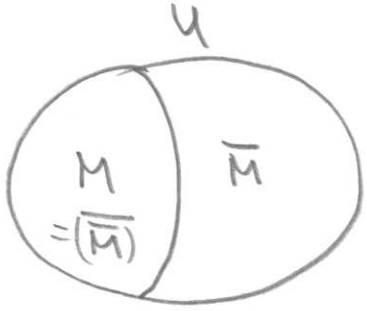
Für $M \subseteq U$ setzen wir dann $\overline{M} := U \setminus M$ und bezeichnen $\overline{M}$ als das Komplement von M in U.

Rechenregeln für Komplemente:

Satz 2.8:
Sei U unser festes Universum, das selbst eine Menge ist, und seien $M, N \subseteq U$. Dann gelten:

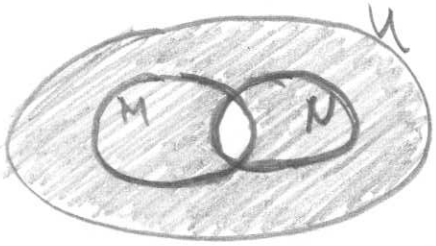
(a) (Doppelte Negation)

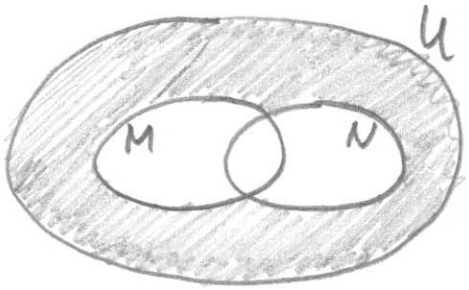
$$\overline{(\overline{M})} = M$$



(b) (De Morgansche Regeln)

$$\overline{(M \cap N)} = \overline{M} \cup \overline{N}, \qquad \overline{(M \cup N)} = \overline{M} \cap \overline{N}$$





(c) (Inversionsregeln)

$$M \cap \overline{M} = \emptyset, \qquad M \cup \overline{M} = U$$

(d) (Identitätsregeln)

$$M \cap U = M, \qquad M \cup \emptyset = M$$

Beweis: Übung.

Mächtigkeit / Kardinalität

Definition 2.9:

(a) Eine Menge heißt <u>endlich</u>, wenn sie nur endlich viele Elemente enthält

(b) Die <u>Mächtigkeit</u> (oder <u>Kardinalität</u>) einer Menge M ist

$$|M| := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente in } M, & \text{falls } M \text{ endlich} \\ \infty \ (\text{unendlich}), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Notation: $\mathrm{Card}(M) := |M|$.

Beispiel 2.10:

- $|\{2,4,6\}| = 3$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\emptyset\}| = 1$
- $|\mathbb{N}| = \infty$
- $|\mathbb{Z}| = \infty$
- $|\{2,4,6,4\}| = 3$
- $|\{2, \{a,b\}\}| = 2$

Vorsicht beim Vergleich der Mächtigkeit unendlicher Mengen:

Hilberts Hotel (David Hilbert, 1862–1943)

Hilberts Hotel hat unendlich viele Zimmer, die fortlaufend mit 1, 2, 3, ... (also mit allen Zahlen aus $\mathbb{N}_{>0}$) nummeriert sind.

Obwohl alle Zimmer belegt sind, schafft der Angestellte an der Rezeption es, für jeden neuen Gast Platz zu schaffen.

Wie? — Er bittet alle Gäste, in das Zimmer mit der nächsthöheren Nummer umzuziehen und gibt dem neuen Gast das Zimmer mit der Nummer 1.

Fügt man also zu einer unendlichen Menge ein Element hinzu, so erhält man keine "wirklich größere" Menge.

Die Potenzmenge (engl: power set)

Definition 2.11

Die Potenzmenge einer Menge M (kurz: $\mathcal{P}(M)$) ist die Menge aller Teilmengen von M. D.h.:

$$\mathcal{P}(M) := \{ N : N \subseteq M \}$$

Notation: In manchen Büchern wird $\mathcal{P}(M)$ auch mit $\mathrm{Pow}(M)$ (für "power set") oder mit 2^M bezeichnet.

Beispiele 2.12:

- $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$
- $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$

Insbesondere: $\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset$.

Paare, Tupel und Kartesische Produkte

Definition 2.13 (Paare und Tupel)

(a) Für beliebige a, c bezeichnet (a,c) das (geordnete) Paar mit Komponenten a und c.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ und beliebige $a_1, \dots, a_k$ bezeichnet $(a_1, \dots, a_k)$ das k-Tupel mit Komponenten $a_1, \dots, a_k$

(c) (Gleichheit zweier Tupel):
F.a. $k, \ell \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell$ gilt

$$(a_1, \dots, a_k) = (b_1, \dots, b_\ell) \quad :\Leftrightarrow \quad k = \ell \text{ und } a_1 = b_1 \text{ und } a_2 = b_2 \text{ und} \cdots \text{ und } a_k = b_k$$

Bemerkung 2.14

(a) Für $k=0$ gibt es genau ein k-Tupel, nämlich das leere Tupel $()$, das keine Komponente(n) hat.

(b) Beachte den Unterschied zwischen Tupeln und Mengen: z.B.:
- $(1,2) \neq (2,1)$, aber $\{1,2\} = \{2,1\}$
- $(1,1,2) \neq (1,2)$, aber $\{1,1,2\} = \{1,2\}$

Definition 2.14:

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei M eine Menge.
Die <u>k-te Potenz von M</u> ist die Menge

$$M^k := \{ (m_1, \dots, m_k) : m_1 \in M, \dots, m_k \in M \}.$$

<u>Insbesondere</u>: $M^0 = \{()\}$ besteht aus genau einem Element, dem leeren Tupel.

(b) Das <u>kartesische Produkt</u> zweier Mengen M, N ist die Menge

$$M \times N := \{ (m,n) : m \in M, n \in N \}$$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $M_1, \dots, M_k$ Mengen.
Das kartesische Produkt von $M_1, \dots, M_k$ ist die Menge

$$M_1 \times \dots \times M_k := \{ (m_1, \dots, m_k) : m_1 \in M_1, \dots, m_k \in M_k \}.$$

<u>Beispiele</u>:

Sei $M = \{a,b\}$, $N = \{1,2,3\}$.

- $M \times N = \{ (a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3) \}$
- $M \times \{1\} = \{ (a,1), (b,1) \}$
- $M \times \emptyset = \emptyset$
- $M^2 = \{ (a,a), (a,b), (b,a), (b,b) \}$

- $M^1 = \{ (a), (b) \}$
- $M^0 = \{ () \}$
- $\emptyset^2 = \emptyset$
- $\emptyset^1 = \emptyset$
- $\emptyset^0 = \{ () \}$
- In Beispiel 2.1 hatten wir die Karten eines Skat-Kartenspiels durch folgende Wertebereiche modelliert:

  KartenArten = { Kreuz, Pik, Herz, Karo }

  KartenSymbole = { 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass }

  Karten = KartenArten × KartenSymbole

- Uhrzeiten kann man repräsentieren durch Elemente der Menge

  Uhrzeiten := Stunden × Minuten × Sekunden,

  wobei

  Stunden := $\{0, 1, 2, \dots, 24\}$

  Minuten := $\{0, 1, 2, \dots, 59\}$

  Sekunden := $\{0, 1, 2, \dots, 59\}$

  Das Tupel (9, 45, 00) repräsentiert dann die Uhrzeit "9 Uhr, 45 Minuten und 0 Sekunden" — dh den Beginn der Pause in der Vorlesung.