5.5 Semantik der Logik erster Stufe

Um die formale Definition der Semantik der Logik erster Stufe angeben zu können, benötigen wir noch folgende Begriffe:

Notation 5.20

- Eine Formel ψ ist <u>Teilformel</u> einer Formel φ, wenn ψ als Teil-Wort in φ vorkommt

  <u>Beispiel:</u> $\psi := \dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{c}$ ist Teilformel der Formel $\exists v_0\, \dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{c}$.

- Ist φ eine Formel und x eine Variable, so heißt jedes Vorkommen von x in einer Teilformel der Form $\exists x \psi$ oder $\forall x \psi$ <u>gebunden</u>.

  Jedes andere Vorkommen von x in φ heißt <u>frei</u>.

  <u>Beispiel:</u> $\varphi := \left(\dot{f}(v_0, \dot{c}) = v_3 \wedge \exists v_0\, \dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{c} \right)$

  freies Vorkommen von v_0 in φ

  freies Vorkommen von v_3 in φ

  gebundene Vorkommen von v_0 in φ

  freies Vorkommen von v_1 in φ.

- Die Menge <u>frei(φ)</u> aller <u>freien Variablen</u> einer FO[σ]-Formel φ besteht aus allen Variablen, die mindestens einmal frei in φ vorkommen

  <u>Beispiel:</u> $\text{frei}\left(\dot{f}(v_0, \dot{c}) \doteq v_3 \right) = \{ v_0, v_3 \}$

  $\text{frei}\left(\exists v_0\, \dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{c} \right) = \{ v_1 \}$

  $\text{frei}\left(\left(\dot{f}(v_0, \dot{c}) \doteq v_3 \wedge \exists v_0\, \dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{c} \right) \right) = \{ v_0, v_3, v_1 \}$

- Eine FO[σ]-Formel φ heißt <u>Satz</u> (genauer: FO[σ]-Satz), falls sie keine freien Variablen besitzt, d.h. falls $\text{frei}(\varphi) = \emptyset$.

<u>Definition 5.21</u>: (Belegung und Interpretation)

(a) Eine <u>Belegung</u> in einer σ-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ ist eine partielle Funktion β von Var nach A

(d.h. β ordnet jeder Variablen $x \in \text{Def}(\beta)$ ein Element $\beta(x)$ aus dem Universum von $\mathfrak{A}$ zu).

(b) Eine Belegung β ist eine <u>Belegung für eine FO[σ]-Formel φ</u> (bzw. <u>passend zu φ</u>), wenn $\text{frei}(\varphi) \subseteq \text{Def}(\beta)$.

(c) Eine <u>σ-Interpretation</u> ist ein Paar

$$\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$$

bestehend aus einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β in $\mathfrak{A}$.

$\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ ist eine <u>Interpretation für eine FO[σ]-Formel φ</u> (bzw. passend zu φ), wenn β passend zu φ ist.

Definition 5.22 (Semantik von σ-Termen)

Sei σ eine Signatur.
Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem σ-Term $t \in T_\sigma$ und jeder σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, so dass $\mathrm{Def}(\beta)$ jede in t vorkommende Variable enthält, einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuordnet:

- Für alle $x \in \mathrm{Var}$ ist $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$
- Für alle Konstantensymbole $\dot{c} \in \sigma$ ist $[\![\dot{c}]\!]^{\mathcal{I}} := \dot{c}^{\mathfrak{A}}$
- Für alle Funktionssymbole $\dot{f} \in \sigma$, für $r := \mathrm{ar}(\dot{f})$ und für alle σ-Terme $t_1, \dots, t_r \in T_\sigma$ gilt:

$$[\![\dot{f}(t_1, \dots, t_r)]\!]^{\mathcal{I}} := \dot{f}^{\mathfrak{A}}\left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_r]\!]^{\mathcal{I}}\right).$$

Beispiel 5.23

Sei $\sigma = \{\dot{f}, \dot{c}\}$ und sei $\mathfrak{A} := (A, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$ mit

- $A := \mathbb{N}$
- $\dot{f}^{\mathfrak{A}} := +^{\mathbb{N}}$ die Addition auf $\mathbb{N}$
- $\dot{c}^{\mathfrak{A}} := 0^{\mathbb{N}}$ die natürliche Zahl 0

wie in Beispiel 5.11 (c).

Sei β eine Belegung mit $\beta(v_1) = 1$ und $\beta(v_2) = 7$. Und sei $\mathfrak{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$.

Sei t der Term $\dot{f}(v_2, \dot{f}(v_1, \dot{c}))$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
[\![t]\!]^{\mathfrak{I}} &= [\![\dot{f}(v_2, \dot{f}(v_1, \dot{c}))]\!]^{\mathfrak{I}} \\
&= \dot{f}^{\mathfrak{A}}\left([\![v_2]\!]^{\mathfrak{I}}, [\![\dot{f}(v_1, \dot{c})]\!]^{\mathfrak{I}}\right) \\
&= [\![v_2]\!]^{\mathfrak{I}} + [\![\dot{f}(v_1, \dot{c})]\!]^{\mathfrak{I}} \\
\dot{f}^{\mathfrak{A}} = \text{Addition auf } \mathbb{N} \quad &= \beta(v_2) + \dot{f}^{\mathfrak{A}}\left([\![v_1]\!]^{\mathfrak{I}}, [\![\dot{c}]\!]^{\mathfrak{I}}\right) \\
&= \beta(v_2) + \left([\![v_1]\!]^{\mathfrak{I}} + [\![\dot{c}]\!]^{\mathfrak{I}}\right) \\
&= \beta(v_2) + \beta(v_1) + \dot{c}^{\mathfrak{A}} \\
\text{Def. } \beta \text{ und } \dot{c}^{\mathfrak{A}} \quad &= 7 + 1 + 0 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

Notation 5.24

- Ist β eine Belegung in einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$, ist $x \in Var$ und ist $a \in A$, so sei

$$\beta\frac{a}{x}$$

die Belegung mit $Def(\beta\frac{a}{x}) := Def(\beta) \cup \{x\}$, die für alle $y \in Def(\beta\frac{a}{x})$ definiert ist durch

$$\beta\frac{a}{x}(y) := \begin{cases} a & \text{falls } y = x, \\ \beta(y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Ist $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation, ist $x \in Var$ und ist $a \in A$, so sei

$$\mathfrak{I}\frac{a}{x} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x}).$$

Wir können nun (endlich) die formale Semantik der Logik erster Stufe festlegen.

Definition 5.25 (Semantik der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur.
Rekursiv über den Aufbau von $FO[\sigma]$ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder $FO[\sigma]$-Formel φ und jeder zu φ passenden Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ einen <u>Wahrheitswert</u> (kurz: <u>Wert</u>) $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \in \{0, 1\}$ zuordnet:

<u>Rekursionsanfang</u>:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:

$$[\![t_1 \doteq t_2]\!]^{\mathcal{I}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für jedes Relationssymbol $\dot{R} \in \sigma$, für $r := ar(\dot{R})$ und für alle σ-Terme $t_1, \dots, t_r$ in T_σ gilt:

$$[\![R(t_1, \dots, t_r)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } ([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_r]\!]^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathfrak{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Rekursionsschritt</u>

- Die Semantik der Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ist wie in der Aussagenlogik definiert — beispielsweise ist für $\varphi \in FO[\sigma]$ und $\psi \in FO[\sigma]$

$$[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]^{\mathfrak{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ist $\varphi \in FO[\sigma]$ und ist $x \in Var$, so ist
  - $$[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\mathfrak{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls es mindestens ein } a \in A \text{ gibt,} \\ & \text{so dass } [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  - $$[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\mathfrak{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } a \in A \text{ gilt} \\ & [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beispiel 5.26</u>

Sei $\sigma_{Graph} = \{\dot{E}\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol besteht.

Betrachte die $FO[\sigma]$-Formel

$$\varphi := \forall x \forall y \, (\dot{E}(x,y) \rightarrow \dot{E}(y,x))$$

Sei $\mathfrak{A}$ die σ_{Graph}-Struktur, die den gerichteten Graphen

repräsentiert, d.h. $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ mit

$A = \{1, 2, 3\}$ und

$\dot{E}^{\mathfrak{A}} = \{(1,2), (2,1), (2,3)\}$.

Sei β die Belegung mit leerem Definitionsbereich, und sei $\mathfrak{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$.

Dann gilt:

$$[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in A$ gilt: $[\![\forall y\,(\dot{E}(x,y) \to \dot{E}(y,x))]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = 1$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in A$ gilt:
für alle $b \in B$ gilt: $[\![(\dot{E}(x,y) \to \dot{E}(y,x))]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt:
falls $[\![\dot{E}(x,y)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1$, so auch $[\![\dot{E}(y,x)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt:
falls $(a,b) \in \dot{E}^{\mathfrak{A}}$, so auch $(b,a) \in \dot{E}^{\mathfrak{A}}$

$\Leftrightarrow$ $\dot{E}^{\mathfrak{A}}$ ist symmetrisch, vgl. Def. 4.65

Da in unserem konkreten Graphen $\mathfrak{A}$ für $a=2$ und $b=3$ gilt: $(a,b) \in \dot{E}^{\mathfrak{A}}$, aber $(b,a) \notin \dot{E}^{\mathfrak{A}}$, ist hier $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 0$.

Notation 5.27:

Sei σ eine Signatur und sei φ eine $FO[\sigma]$-Formel.

- Ist $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine zu φ passende σ-Interpretation, so sagen wir "<u>$\mathcal{I}$ erfüllt φ</u>" (bzw. "<u>$\mathcal{I}$ ist ein Modell von φ</u>", kurz: <u>$\mathcal{I} \models \varphi$</u>)

  falls $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

- Ist φ ein <u>Satz</u> (dh φ hat keine freien Variablen), so hängt die Tatsache, ob φ von einer Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ erfüllt wird, nur von der Struktur $\mathfrak{A}$ und nicht von der Belegung β ab.

  An Stelle von "$\mathcal{I} \models \varphi$" schreiben wir dann kurz "$\mathfrak{A} \models \varphi$" und sagen "die σ-Struktur $\mathfrak{A}$ erfüllt den Satz φ".

Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, Folgerung und Äquivalenz

Definition 5.28:

Sei σ eine Signatur und sei φ eine $FO[\sigma]$-Formel.

(a) φ heißt <u>erfüllbar</u>, wenn es (mindestens) eine zu φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gibt, die φ erfüllt.

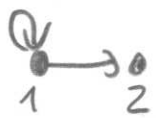
(b) φ heißt <u>unerfüllbar</u>, wenn φ nicht erfüllbar ist.

(c) φ heißt <u>allgemeingültig</u>, wenn jede zu φ passende σ-Interpretation φ erfüllt.

Beispiel 5.29:

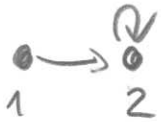
Sei $\sigma_{Graph} := \{\dot{E}\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol besteht.

Die $FO[\sigma]$-Formel $\varphi := \forall y\, \dot{E}(x,y)$ ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig, denn:

Sei $\mathfrak{A} := (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ der gerichtete Graph  und sei β die Belegung mit $\beta(x) = 1$.

Dann erfüllt die Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ die Formel φ.
Somit ist φ erfüllbar.

Andererseits gilt für den Graphen $\mathfrak{B} := (B, \dot{E}^{\mathfrak{B}})$



und die Belegung β mit $\beta(x) = 1$, dass die zu φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I} := (\mathfrak{B}, \beta)$ die Formel φ <u>nicht</u> erfüllt (dh $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0$),

denn:

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \iff \text{Für jedes } b \in B \text{ gilt: } [\![\dot{E}(x,y)]\!]^{\mathcal{I}\frac{b}{y}} = 1$$

$$\iff \text{Für jedes } b \in B \text{ gilt: } \left(\beta\tfrac{b}{y}(x),\ \beta\tfrac{b}{y}(y)\right) \in \dot{E}^{\mathfrak{B}}$$

$$\iff \text{Für jedes } b \in B \text{ gilt: } (1, b) \in \dot{E}^{\mathfrak{B}}$$

Aber für $b := 1$ gilt: $(1, 1) \notin \dot{E}^{\mathfrak{B}}$, und daher ist $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0$. $\mathcal{I}$ ist also eine zu φ passende σ-Interpretation, die φ <u>nicht</u> erfüllt.
Somit ist φ nicht allgemeingültig.

Beobachtung 5.30:

Für alle Formeln φ der Logik erster Stufe gilt:

(a) φ ist allgemeingültig $\iff$ $\neg\varphi$ ist unerfüllbar.

(b) φ ist erfüllbar $\iff$ $\neg\varphi$ ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Übung.

Definition 5.31 (semantische Folgerung)

Sei σ eine Signatur und seien φ und ψ zwei $Fo[\sigma]$-Formeln.

Wir sagen: <u>ψ folgt aus φ</u> (kurz: $\varphi \models \psi$, "φ impliziert ψ"), falls für jede zu φ und ψ passende Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

Falls $\underbrace{\mathcal{I} \models \varphi}_{\text{dh } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1}$, so auch $\underbrace{\mathcal{I} \models \psi}_{\text{dh } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1}$.

Definition 5.32 (logische Äquivalenz)

Sei σ eine Signatur.
Zwei FO[σ]-Formeln φ und ψ heißen <u>äquivalent</u> (kurz: $\varphi \equiv \psi$), wenn für jede zu φ und ψ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt: $\mathcal{I}$ erfüllt $\varphi \iff \mathcal{I}$ erfüllt ψ.

Beobachtung 5.33:

Sei σ eine Signatur und seien φ und ψ zwei FO[σ]-Formeln. Es gilt:

(a) $\varphi \equiv \psi \iff \varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$

(b) $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \leftrightarrow \psi)$ ist allgemeingültig

(c) $\varphi \models \psi \iff (\varphi \rightarrow \psi)$ ist allgemeingültig.

Beweis: Übung.

Grenzen der Logik erster Stufe

In Beispiel 5.18 und 5.19 und auf den Übungsblättern 9 und 10 haben wir viele Beispiele für umgangssprachliche Aussagen kennengelernt, die man durch Formeln der Logik erster Stufe beschreiben kann. Es gibt allerdings auch Aussagen, die <u>nicht</u> in der Logik erster Stufe formalisiert werden können:

<u>Satz 5.34:</u>

Sei $\sigma_{Graph} := \{\dot{E}\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$ besteht. Es gilt:

(a) Es gibt keinen $FO[\sigma_{Graph}]$-Satz φ, so dass für jeden gerichteten Graphen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ gilt:

$$\mathfrak{A} \text{ erfüllt } \varphi \iff \mathfrak{A} \text{ ist azyklisch}$$
(vgl. Definition 4.14)

(b) Es gibt keine $FO[\sigma_{Graph}]$-Formel ψ mit freien Variablen x und y, so dass für jeden gerichteten Graphen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ und jede zu ψ passende Belegung β in $\mathfrak{A}$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \text{ erfüllt } \psi \iff \text{es gibt in } \mathfrak{A} \text{ einen Weg von Knoten } \beta(x) \text{ zu Knoten } \beta(y).$$

Einen Beweis dieses Satzes können Sie in der Vorlesung "Logik in der Informatik" kennenlernen.

5.6 Ein Anwendungsbereich der Logik erster Stufe: Datenbanken

Relationale Datenbanken bestehen aus Tabellen, die sich als Relationen auffassen lassen. Datenbanken lassen sich daher als Strukturen über einer passenden Signatur auffassen.

Die in der Praxis gebräuchlichste Datenbankanfragesprache ist SQL. Der "Kern" von SQL basiert auf der Logik erster Stufe, die in der Datenbankterminologie oft auch als "relationaler Kalkül" (engl.: "relational calculus") bezeichnet wird.

Beispieldatenbank mit Kinodaten (1/4)

Zur Illustration von Anfragen verwenden wir eine kleine Datenbank mit Kinodaten, bestehend aus

- einer Tabelle *Orte*, die Informationen über Kinos (Kino, Adresse, Telefonnummer) enthält.
- einer Tabelle *Filme*, die Informationen über Filme enthält (Titel, Regie, Schauspieler)
- einer Tabelle *Programm*, die Informationen zum aktuellen Kinoprogramm enthält (Kino, Titel, Zeit)

Beispieldatenbank mit Kinodaten (2/4)

Orte-Tabelle:

Kino	Adresse	Telefon
Babylon	Dresdner Str. 2	61609693
Casablanca	Friedenstr. 12	6775752
Cinestar Cubix Alexanderplatz	Rathausstr. 1	2576110
Die Kurbel	Giesebrechtstr. 4	88915998
Filmpalast Berlin	Kurfürstendamm 225	8838551
International	Karl-Marx-Allee 33	24756011
Kino in der Kulturbrauerei	Schönhauser Allee 36	44354422
Moviemento	Kottbusser Damm 22	6924785

Beispieldatenbank mit Kinodaten (3/4)

Filme-Tabelle:

Titel	Regie	Schauspieler
Capote	Bennet Miller	Philip Seymour Hoffman
Capote	Bennet Miller	Catherine Keener
Das Leben der Anderen	F. Henkel von Donnersmarck	Martina Gedeck
Das Leben der Anderen	F. Henkel von Donnersmarck	Ulrich Tukur
Der ewige Gärtner	Fernando Meirelles	Ralph Fiennes
Der ewige Gärtner	Fernando Meirelles	Rachel Weisz
Good Night and Good Luck	George Clooney	David Strathairn
Good Night and Good Luck	George Clooney	Patricia Clarkson
Knallhart	Detlev Buck	Jenny Elvers
Knallhart	Detlev Buck	Jan Henrik Stahlberg
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Michael Braun	Dietmar Schönherr
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Theo Mezger	Dietmar Schönherr
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Michael Braun	Eva Pflug
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Theo Mezger	Eva Pflug
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Michael Braun	Wolfgang Völz
Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	Theo Mezger	Wolfgang Völz
Requiem	Hans-Christian Schmid	Sandra Hüller
Sommer vorm Balkon	Andreas Dresen	Nadja Uhl
Sommer vorm Balkon	Andreas Dresen	Inka Friedrich
Sommer vorm Balkon	Andreas Dresen	Andreas Schmidt
Syriana	Stephen Gaghan	George Clooney
Syriana	Stephen Gaghan	Matt Damon
V wie Vendetta	James McTeigue	Natalie Portman
Walk the Line	James Mangold	Joaquin Phoenix
Walk the Line	James Mangold	Reese Witherspoon

Beispieldatenbank mit Kinodaten (4/4)

Programm-Tabelle:

Kino	Titel	Zeit
Babylon	Capote	17:00
Babylon	Capote	19:30
Kino in der Kulturbrauerei	Capote	17:30
Kino in der Kulturbrauerei	Capote	20:15
International	Das Leben der Anderen	14:30
International	Das Leben der Anderen	17:30
International	Das Leben der Anderen	20:30
Filmpalast Berlin	Good Night and Good Luck	15:30
Filmpalast Berlin	Good Night and Good Luck	17:45
Filmpalast Berlin	Good Night and Good Luck	20:00
Kino in der Kulturbrauerei	Good Night and Good Luck	18:00
Kino in der Kulturbrauerei	Good Night and Good Luck	20:30
Kino in der Kulturbrauerei	Good Night and Good Luck	22:45
Babylon	Sommer vorm Balkon	21:45
Kino in der Kulturbrauerei	Sommer vorm Balkon	21:45
Filmmuseum Potsdam	Raumpatrouille Orion – Rücksturz ins Kino	22:00

238

Für eine geeignete Signatur σ_{Kino} können wir diese Datenbank durch eine σ_{Kino}-Struktur $\mathfrak{A}_{Kino}$ folgendermaßen modellieren:

Die Signatur σ_{Kino} besteht aus

- einem 3-stelligen Relationssymbol Orte
- - - - - - - - - - - - - - - Filme
- - - - - - - - - - - - - - - Programm
- Konstantensymbolen 'Babylon', 'Casablanca', ..., 'Capote', 'Das Leben der Anderen', ... usw.

  – dh für jeden Eintrag c in der Beispieldatenbank gibt es ein Konstantensymbol 'c'

Die σ_{Kino}-Struktur $\mathfrak{A}_{Kino}$ hat das Universum

$A_{Kino} := \{$ Babylon, Casablanca, Cinestar Cubix am Alexanderplatz, ..., Dresdner Str. 2, Friedenstr. 12, ..., 61609693, ..., Capote, ..., 22:00 $\}$,

die drei 3-stelligen Relationen

$$\dot{\text{Orte}}^{\mathfrak{A}_{Kino}} := \{ (\text{Babylon}, \text{Dresdner Str. 2}, 61609693),$$
$$(\text{Casablanca}, \text{Friedenstr. 12}, 6775752),$$
$$\ldots,$$
$$(\text{Moviemento}, \text{Kottbusser Damm 22}, 6924785) \}$$

$$\dot{\text{Filme}}^{\mathfrak{A}_{Kino}} := \{ (\text{Capote}, \text{Bennet Miller}, \text{Philip Seymour Hoffman}),$$
$$(\text{Capote}, \text{Bennet Miller}, \text{Catherine Keener}),$$
$$\ldots$$
$$(\text{Walk the Line}, \text{James Mangold}, \text{Reese Witherspoon}) \}$$

$$\dot{\text{Programm}}^{\mathfrak{A}_{Kino}} := \{ (\text{Babylon}, \text{Capote}, 17{:}00),$$
$$(\text{Babylon}, \text{Capote}, 19{:}30),$$
$$(\text{Kino in der Kulturbrauerei}, \text{Capote}, 17{:}30),$$
$$\ldots \}$$

Sowie für jedes in σ_{Kino} vorkommende Konstantensymbol '$\dot{c}$' die Konstante $\text{'}\dot{c}\text{'}^{\mathfrak{A}_{Kino}} := c$

(dh: $\text{'}\dot{\text{Babylon}}\text{'}^{\mathfrak{A}_{Kino}} = \text{Babylon}$,

$\text{'}\dot{\text{Capote}}\text{'}^{\mathfrak{A}_{Kino}} = \text{Capote}$,

$\text{'}\dot{\text{George Clooney}}\text{'}^{\mathfrak{A}_{Kino}} = \text{George Clooney}$ usw).

Anfragen an die Kinodatenbank lassen sich auf unterschiedliche Art formulieren:

<u>Beispiel 5.35</u>

Eine Anfrage an unsere Kinodatenbank:

"Gib die Titel aller Filme aus, die um 20:30 Uhr laufen."

In der Datenbankanfragesprache SQL lässt sich dies folgendermaßen formulieren:

```
SELECT Titel
FROM Programm
WHERE Zeit = '20:30'
```

Dieselbe Anfrage lässt sich auch durch die folgende Formel der Logik erster Stufe beschreiben:

$$\varphi_{\text{Filme um 20:30 Uhr}}(x_T) := \exists x_K \; \text{Programm}(x_K, x_T, \text{'20:30'})$$

Notation 5.36

Sei σ eine Signatur und seien $x_1, \dots, x_n$ Variablen.

- Die Notation $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ deutet an, dass φ eine $FO[\sigma]$-Formel mit $\text{frei}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ist, dh, dass $x_1, \dots, x_n$ diejenigen Variablen sind, die in φ frei vorkommen.

- Ist $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine $FO[\sigma]$-Formel, ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur und sind $a_1, \dots, a_n \in A$ Elemente im Universum von $\mathfrak{A}$, so schreiben wir

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n],$$

um auszudrücken, dass für die Belegung $\beta : \{x_1, \dots, x_n\} \to A$ mit $\beta(x_1) = a_1, \dots, \beta(x_n) = a_n$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi.$$

Definition 5.37

Sei σ eine Signatur, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine $FO[\sigma]$-Formel und $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur.

Die von φ in $\mathfrak{A}$ definierte n-stellige Relation ist

$$\varphi(\mathfrak{A}) := \{ (a_1, \dots, a_n) \in A^n : \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \}.$$

Beispiel 5.38:

Die $FO[\sigma_{Kino}]$-Formel $\varphi_{\text{Filme um 20:30 Uhr}}(x_T)$ (aus Bsp 5.35) definiert in unserer Kinodatenbank $\mathfrak{A}_{Kino}$ die 1-stellige Relation

$$\varphi_{\text{Filme um 20:30 Uhr}}(\mathfrak{A}_{Kino}) = \{ (\text{Das Leben der Anderen}), (\text{Good Night and Good Luck}) \}$$

Darstellung als Tabelle:

Filme um 20:30 Uhr:

Titel
Das Leben der Anderen
Good Night and Good Luck

Beispiel 5.39

Die Anfrage

"Gib Name und Adresse aller Kinos aus, in denen ein Film läuft, in dem George Clooney mitspielt oder Regie geführt hat"

lässt sich folgendermaßen formulieren:

In SQL:

```
SELECT  Orte.Kino, Orte.Adresse
FROM    Orte, Filme, Programm
WHERE   Orte.Kino = Programm.Kino AND
        Filme.Titel = Programm.Titel AND
        (Filme.Schauspieler = 'George Clooney' OR
         Filme.Regie = 'George Clooney')
```

In Logik erster Stufe:

$$\varphi_{\text{Kinos mit George Clooney}}(x_K, x_A) :=$$

$$\exists x_{Tel}\, \exists x_T\, \exists x_Z\, ((\text{Orte}(x_K, x_A, x_{Tel}) \wedge \text{Programm}(x_K, x_T, x_Z)) \wedge (\exists x_R\, \text{Filme}(x_T, x_R, \text{'George Clooney'}) \vee \exists x_S\, \text{Filme}(x_T, \text{'George Clooney'}, x_S)))$$

In unserer konkreten Kinodatenbank $\mathfrak{A}_{Kino}$ liefert diese Formel die 2-stellige Relation

$$\varphi_{\text{Kinos mit George Clooney}}(\mathfrak{A}_{Kino}) =$$

$$\{ (\text{Filmpalast Berlin}, \text{Kurfürstendamm 225}), (\text{Kino in der Kulturbrauerei}, \text{Schönhauser Allee 36}) \}$$

Darstellung als Tabelle:

Kinos mit George Clooney:

Kino	Adresse
Filmpalast Berlin	Kurfürstendamm 225
Kino in der Kulturbrauerei	Schönhauser Allee 36

Details zum Thema Datenbanken und Datenbankanfragesprachen können Sie in den Vorlesungen "Datenbanksysteme I und II" und "Logik und Datenbanken" kennenlernen.