5. Logik (Teil II) – Logik erster Stufe (Prädikatenlogik)

In Kapitel 3 haben wir bereits die Aussagenlogik kennengelernt, die einen Formalismus darstellt, mit dessen Hilfe man "Wissen" modellieren und Schlüsse aus dem Wissen ziehen kann.

In diesem Kapitel werden wir die Logik erster Stufe (bzw. Prädikatenlogik) als einen weiteren solchen Formalismus kennenlernen. Im Vergleich zur Aussagenlogik hat die Prädikatenlogik den Vorteil, dass

- eine klare Trennung zwischen "Daten" einerseits und "Logik" andererseits besteht, und dass in der Prädikatenlogik
- wesentlich umfangreichere Ausdrucksmöglichkeiten zur Verfügung stehen.

Der Preis für diese Vorteile ist allerdings, dass die Prädikatenlogik algorithmisch deutlich schwerer zu handhaben ist als die Aussagenlogik.

5.1 Motivation zur Logik erster Stufe

Grenzen der Aussagenlogik

Beispiel 5.1 (Verwandtschaftsbeziehungen)

Die Aussagenlogik kann helfen, um Aussagen der Art

"Anne und Bernd sind Geschwister.
Wenn Christine Annes Tochter ist, dann
ist Bernd Christines Onkel"

zu modellieren und Schlüsse daraus zu ziehen.

Für die Modellierung der folgenden Aussage ist die Aussagenlogik aber eher ungeeignet:

"Es gibt in Frankfurt mindestens 2 Leute, die mehr als 3 Kinder, aber selbst keine Geschwister haben."

Beispiel 5.2 (Arithmetische Aussagen)

Die Aussagenlogik kann helfen, um Sätze der Art

"Wenn eine Zahl gerade ist, dann ist sie nicht ungerade"

zu formalisieren.

Für viele andere Aussagen ist die Aussagenlogik aber eher ungeeignet, zum Beispiel:

"Es gibt eine Zahl, die nicht Summe zweier Primzahlen ist."

Ein Überblick über die Logik erster Stufe

Die Logik erster Stufe ist ein Formalismus, mit dem man die in den beiden obigen Beispielen genannten Aussagen bequem beschreiben kann.

Genau wie die Aussagenlogik besitzt die Logik erster Stufe

- eine <u>Syntax</u>, die festlegt, welche Zeichenketten Formeln der Logik erster Stufe sind und

- eine <u>Semantik</u>, die festlegt, welche "Bedeutung" einzelne Formeln haben.

Die Logik erster Stufe beschäftigt sich mit <u>Objekten</u> (z.B. den Einwohnern Frankfurts und deren Verwandtschaftsbeziehungen (Bsp 5.1) oder den natürlichen Zahlen und deren Addition und Multiplikation (Bsp 5.2)) und

<u>Aussagen über deren Eigenschaften.</u>

(Im Gegensatz dazu beschäftigt sich die Aussagenlogik nicht mit Objekten sondern lediglich mit "wahren" und "falschen" Aussagen und deren Kombination.)

Vor der Einführung in die Syntax und die Semantik der Logik erster Stufe, wenden wir uns zunächst den Objekten zu, über die Formeln der Logik erster Stufe "reden" können.

5.2 Strukturen

Die Objekte, über die Formeln der Logik erster Stufe Aussagen treffen können, heißen <u>Strukturen</u>.

Viele Objekte lassen sich auf natürliche Weise durch solche Strukturen repräsentieren, beispielsweise

- Graphen $G = (V, E)$
- Bäume $B = (V, E)$
- die natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation, $(\mathbb{N}, +, \times)$
- die reellen Zahlen mit Addition, Multiplikation und den Konstanten 0 und 1, $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$
- Datenbanken

usw.

Die im Folgenden definierten <u>Signaturen</u> legen den "Typ" (bzw. das "Format") der entsprechenden Strukturen fest.

Definition 5.3

Eine <u>Signatur</u> (bzw. ein <u>Vokabular</u> bzw. eine <u>Symbolmenge</u>; englisch: signature, vocabulary) ist eine Menge σ (in Worten: sigma) von Relationssymbolen, Funktionssymbolen und/oder Konstantensymbolen

Jedes Relationssymbol $\dot{R} \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $\dot{f} \in \sigma$ hat eine <u>Stelligkeit</u> (bzw Arität, engl.: arity)

$$ar(\dot{R}) \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{bzw} \quad ar(\dot{f}) \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Notation 5.4

- In diesem Kapitel bezeichnet der griechische Buchstabe σ immer eine Signatur.
- Wir kennzeichnen Symbole aus σ immer mit einem Punkt, wie in $\dot{R}$ bzw. $\dot{f}$.
- Für Relationssymbole verwenden wir meistens Großbuchstaben wie $\dot{R}, \dot{P}, \dot{E}, \dot{R}_1, \dot{R}_2, \dots$,
  für Funktionssymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie $\dot{f}, \dot{g}, \dot{h}, \dots$,

- für Konstantensymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie $\dot{c}, \dot{d}, \ldots$.

- Gelegentlich verwenden wir als Relations- und Funktionssymbole auch Zeichen wie

  $\dot{\leq}$ (2-stelliges Relationssymbol),

  $\dot{+}, \dot{\times}$ (2-stellige Funktionssymbole),

  $\dot{0}, \dot{1}$ (Konstantensymbole).

<u>Definition 5.5</u>

Eine <u>Struktur über der Signatur σ</u> (kurz: <u>σ-Struktur</u>) ist ein Paar

$$\mathfrak{A} = (A, \alpha),$$

bestehend aus:

- einer nicht-leeren Menge A, dem so genannten <u>Universum</u> (bzw. <u>Träger</u>, engl.: universe, domain) von $\mathfrak{A}$, und

- einer auf σ definierten Abbildung α, die
  - jedem Relationssymbol $\dot{R} \in \sigma$ eine Relation $\alpha(\dot{R}) \subseteq A^{ar(\dot{R})}$ der Stelligkeit $ar(\dot{R})$ zuordnet

- jedem Funktionssymbol $\dot{f} \in \sigma$ eine Funktion $\alpha(\dot{f}) : A^{ar(\dot{f})} \to A$ zuordnet,

- jedem Konstantensymbol $\dot{c} \in \sigma$ ein Element $\alpha(\dot{c}) \in A$ zuordnet.

Notation 5.6

- Strukturen bezeichnen wir meistens mit Fraktur-Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}, \ldots$; das Universum der Strukturen durch die entsprechenden lateinischen Großbuchstaben, also $A, B, G, \ldots$

- Ist $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ eine σ-Struktur, so schreiben wir für jedes Symbol $\dot{S} \in \sigma$ oft

  $\dot{S}^{\mathfrak{A}}$ an Stelle von $\alpha(\dot{S})$.

  An Stelle von $\mathfrak{A} = (A, \alpha)$ schreiben wir oft auch $\mathfrak{A} = (A, (\dot{S}^{\mathfrak{A}})_{\dot{S} \in \sigma})$,

  oder, falls $\sigma = \{\dot{R}_1, \ldots, \dot{R}_k, \dot{f}_1, \ldots, \dot{f}_l, \dot{c}_1, \ldots, \dot{c}_m\}$ ist,

  $$\mathfrak{A} = (A, \dot{R}_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \dot{R}_k^{\mathfrak{A}}, \dot{f}_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \dot{f}_l^{\mathfrak{A}}, \dot{c}_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \dot{c}_m^{\mathfrak{A}}).$$

<u>Beispiel 5.7</u> (Arithmetische Strukturen)

Sei $\sigma_{Ar} := \{ \dot{+}, \dot{\times}, \dot{0}, \dot{1} \}$, wobei

$\dot{+}$ und $\dot{\times}$ 2-stellige Funktionssymbole und
$\dot{0}$ und $\dot{1}$ Konstantensymbole sind.

Wir betrachten die σ_{Ar}-Struktur

$$\mathbb{N} := (\mathbb{N}, \dot{+}^{\mathbb{N}}, \dot{\times}^{\mathbb{N}}, \dot{0}^{\mathbb{N}}, \dot{1}^{\mathbb{N}}),$$

wobei $\dot{+}^{\mathbb{N}}$ und $\dot{\times}^{\mathbb{N}}$ die natürliche Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind und $\dot{0}^{\mathbb{N}} := 0$, $\dot{1}^{\mathbb{N}} := 1$.

Entsprechend können wir σ_{Ar}-Strukturen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ mit Universum $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ definieren.

<u>Beispiel 5.8</u> (Graphen und Bäume)

Sei $\sigma_{Graph} := \{ \dot{E} \}$, wobei $\dot{E}$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Jeder gerichtete Graph bzw gerichtete Baum (V, E) lässt sich als σ_{Graph}-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ mit Universum $A := V$ und Relation $\dot{E}^{\mathfrak{A}} := E$ auffassen

<u>Beispiel 5.9</u> (Ordnungen)

Sei $\sigma_{Ord} := \{ \dot{\leq} \}$, wobei $\dot{\leq}$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Jeder Präordnung, partiellen Ordnung oder linearen Ordnung $\leq$ auf einer Menge A entspricht eine σ_{Ord}-Struktur

$$\mathfrak{A} = (A, \dot{\leq}^{\mathfrak{A}})$$

mit $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}} := \leq$.

<u>Frage</u>: Wann sind zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ "prinzipiell gleich" (Fachbegriff: isomorph)?

<u>Antwort</u>: Falls $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$ entsteht, indem man die Elemente des Universums von $\mathfrak{A}$ umbenennt.

Analog zum Begriff der Isomorphie von Graphen (Def. 4.26) wird dies durch folgende Definition präzisiert:

Definition 5.10

Sei σ eine Signatur und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen <u>isomorph</u> (kurz: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, in Worten: $\mathfrak{A}$ ist isomorph zu $\mathfrak{B}$), falls es eine <u>bijektive</u> Abbildung $\pi : A \to B$ gibt, für die gilt:

- für jedes Relationssymbol $\dot{R} \in \sigma$, für $r := ar(\dot{R})$ und für alle r-Tupel $(a_1, \dots, a_r) \in A^r$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (\pi(a_1), \dots, \pi(a_r)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

- für jedes Konstantensymbol $\dot{c} \in \sigma$ gilt

$$\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$

- für jedes Funktionssymbol $\dot{f} \in \sigma$, für $r := ar(\dot{f})$ und für alle r-Tupel $(a_1, \dots, a_r) \in A^r$ gilt:

$$\pi\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_r)\right) = f^{\mathfrak{B}}\left(\pi(a_1), \dots, \pi(a_r)\right).$$

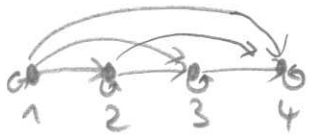
Eine solche Abbildung π wird <u>Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$</u> genannt.

Beispiel 5.11

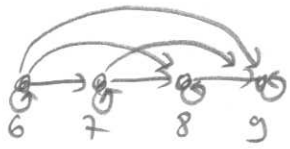
(a) Ist $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$, und sind $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ und $\dot{\leq}^{\mathfrak{B}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf A und B, so sind die beiden σ_{Ord}-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \dot{\leq}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \dot{\leq}^{\mathfrak{B}})$ isomorph

Skizze:

$\mathfrak{A}$:



$\mathfrak{B}$:



Allgemein gilt: Sind A und B endliche Mengen mit $|A| = |B|$ und sind $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ und $\dot{\leq}^{\mathfrak{B}}$ lineare Ordnungen auf $\mathfrak{A} = (A, \dot{\leq}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \dot{\leq}^{\mathfrak{B}})$, so ist $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, und die Abbildung π, die das (bzgl $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$) kleinste Element in A auf das (bzgl. $\dot{\leq}^{\mathfrak{B}}$) kleinste Element von B abbildet und, allgemein, für jedes $i \in \{1, \ldots, |A|\}$ das i-kleinste Element in A (bzgl $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$) auf das i-kleinste Element in B (bzgl. $\dot{\leq}^{\mathfrak{B}}$) abbildet, ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

(b) Sind $\dot{\leq}^{\mathbb{N}}$ und $\dot{\leq}^{\mathbb{Z}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$, so sind die σ_{Ord}-Strukturen

$\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \dot{\leq}^{\mathbb{N}})$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{Z}, \dot{\leq}^{\mathbb{Z}})$

<u>nicht isomorph</u> (kurz: $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$)

<u>Skizze:</u>

$\mathbb{N}$: 

$\mathbb{Z}$: 

(c) Sei $\sigma := \{\dot{f}, \dot{c}\}$, wobei $\dot{f}$ ein 2-stelliges Funktionssymbol und $\dot{c}$ ein Konstantensymbol ist

Sei $\mathfrak{A} := (A, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$, wobei

- $A := \mathbb{N}$
- $\dot{f}^{\mathfrak{A}} := \dot{+}^{\mathfrak{N}}$ die Addition auf $\mathbb{N}$
- $\dot{c}^{\mathfrak{A}} := \dot{0}^{\mathfrak{N}}$ die natürliche Zahl 0 ist

und sei $\mathfrak{B} := (B, \dot{f}^{\mathfrak{B}}, \dot{c}^{\mathfrak{B}})$, wobei

- $B := \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Zweierpotenzen
- $\dot{f}^{\mathfrak{B}} : B \times B \to B$ die Funktion mit
  $f^{\mathfrak{B}}(b_1, b_2) := b_1 \cdot b_2$, f.a. $b_1, b_2 \in B$
- $\dot{c}^{\mathfrak{B}} := 1 = 2^0 \in B$.

Dann gilt: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, und die Abbildung

$\pi : A \to B$ mit $\pi(n) := 2^n$, f.a. $n \in \mathbb{N}$,

ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, denn:

- π ist eine bijektive Abbildung von A nach B
- Für das Konstantensymbol $\dot{c} \in \sigma$ gilt:

$$\pi(\dot{c}^{\mathfrak{A}}) \underset{\text{Def } \dot{c}^{\mathfrak{A}}}{=} \pi(0) \underset{\text{Def } \pi}{=} 2^0 \underset{\text{Def } \dot{c}^{\mathfrak{B}}}{=} \dot{c}^{\mathfrak{B}}$$

- Für das Funktionssymbol $\dot{f} \in \sigma$ und für alle $(a_1, a_2) \in A^2$ gilt

$$\pi\left(\dot{f}^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2)\right) \underset{\text{Def } \dot{f}^{\mathfrak{A}}}{=} \pi(a_1 + a_2) \underset{\text{Def } \pi}{=} 2^{a_1 + a_2}$$

und

$$\dot{f}^{\mathfrak{B}}\left(\pi(a_1), \pi(a_2)\right) \underset{\text{Def } \pi}{=} \dot{f}^{\mathfrak{B}}\left(2^{a_1}, 2^{a_2}\right) \underset{\text{Def } \dot{f}^{\mathfrak{B}}}{=} 2^{a_1} \cdot 2^{a_2} = 2^{a_1 + a_2}.$$

Also: $\pi\left(\dot{f}^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2)\right) = \dot{f}^{\mathfrak{B}}\left(\pi(a_1), \pi(a_2)\right)$.

Somit ist π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

Wir wissen nun, über welche Objekte Formeln der Logik erster Stufe "reden" können: über σ-Strukturen, wobei σ eine Signatur ist.

Als nächstes legen wir die Syntax der Logik erster Stufe fest.

5.3 Syntax der Logik erster Stufe

Die Logik erster Stufe übernimmt, verändert und erweitert die Syntax der Aussagenlogik

- Was gleich bleibt:
  Alle Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ werden übernommen

- Was sich ändert:
  - Variablen stehen nicht mehr für "wahre" oder "falsche" Aussagen, sondern für Elemente im Universum einer σ-Struktur
  - Variablen sind keine atomaren Formeln mehr

- Was neu hinzukommt
  - Es gibt <u>Quantoren</u> $\exists$ (für "es existiert") und $\forall$ (für "für alle")
  - Es gibt Symbole für Elemente aus der Signatur σ.

Definition 5.12 (Variablen und Alphabet der Logik erster Stufe)

(a) Eine <u>Individuenvariable</u> (kurz: <u>Variable</u>) hat die Form v_i, für $i \in \mathbb{N}$.

Die Menge aller Variablen bezeichnen wir mit Var, d.h. $Var := \{ v_i : i \in \mathbb{N} \}$.

(b) Sei σ eine Signatur.
Das <u>Alphabet A_σ</u> der <u>Logik erster Stufe über σ</u> besteht aus

- den Variablen in Var
- den Symbolen in σ
- den Quantoren $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor)
- dem Gleichheitssymbol $\doteq$
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- den Klammern (,) und dem Komma ,

D.h.

$$A_\sigma = Var \cup \sigma \cup \{\exists, \forall\} \cup \{\doteq\} \dot\cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), ,\}$$

Definition 5.13 (Terme der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur.
Die Menge T_σ der <u>σ-Terme</u> ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von A_σ^*:

Basisregeln:
- Für jedes Konstantensymbol $\dot{c} \in \sigma$ ist $\dot{c} \in T_\sigma$
- Für jede Variable $x \in Var$ ist $x \in T_\sigma$

Rekursive Regeln:
- Für jedes Funktionssymbol $\dot{f} \in \sigma$ und für $r := ar(\dot{f})$ gilt:
  Sind $t_1 \in T_\sigma, \dots, t_r \in T_\sigma$, so ist auch
  $\dot{f}(t_1, \dots, t_r) \in T_\sigma$.

Beispiel 5.14

Sei $\sigma = \{\dot{f}, \dot{c}\}$ die Signatur aus Bsp. 5.11 (c), die aus einem 2-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$ besteht.
Folgende Worte aus A_σ^* sind σ-Terme:

$\dot{c}, \; v_4, \; \dot{f}(\dot{c}, \dot{c}), \; \dot{f}(\dot{c}, v_0), \; \dot{f}(\dot{c}, \dot{f}(\dot{c}, v_0))$

Folgende Worte sind keine σ-Terme:

$0, \; \dot{f}(0, \dot{c}), \; \dot{f}(v_0, \dot{c}, v_1), \; f^{\mathfrak{A}}(2, 3).$

Definition 5.15 (Formeln der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur.

Die Menge $FO[\sigma]$ aller Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ (kurz: $FO[\sigma]$-Formeln; FO steht für die englische Bezeichnung der Logik erster Stufe: first-order logic) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von A_σ^*:

Basisregeln:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:
  $t_1 \doteq t_2 \in FO[\sigma]$
- Für jedes Relationssymbol $\dot{R} \in \sigma$, für $r := ar(\dot{R})$ und für alle σ-Terme $t_1, \dots, t_r$ in T_σ gilt:
  $\dot{R}(t_1, \dots, t_r) \in FO[\sigma]$.

Bemerkung: $FO[\sigma]$-Formeln der Form $t_1 \doteq t_2$ oder $\dot{R}(t_1, \dots, t_r)$ heißen atomare σ-Formeln.

Rekursive Regeln:

- Ist $\varphi \in FO[\sigma]$, so auch $\neg\varphi \in FO[\sigma]$
- Ist $\varphi \in FO[\sigma]$ und $\psi \in FO[\sigma]$, so ist auch
  - $(\varphi \wedge \psi) \in FO[\sigma]$
  - $(\varphi \vee \psi) \in FO[\sigma]$

- $(\varphi \to \psi) \in FO[\sigma]$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in FO[\sigma]$

- Ist $\varphi \in FO[\sigma]$ und ist $x \in Var$, so ist auch
  - $\exists x\, \varphi \in FO[\sigma]$
  - $\forall x\, \varphi \in FO[\sigma]$.

<u>Beispiel 5.16</u>

(a) Sei $\sigma = \{\dot{f}, \dot{c}\}$ die Signatur aus Bsp. 5.14, die aus einem 2-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$ besteht

Folgende Worte aus A_σ^* sind $FO[\sigma]$-Formeln:

- $\dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{c}$ (atomare σ-Formel)
- $\forall v_2\, \dot{f}(v_2, \dot{c}) \doteq v_2$
- $\neg \exists v_3 \left(\dot{f}(v_3, v_3) \doteq v_3 \wedge \neg v_3 \doteq \dot{c} \right)$

Folgende Worte sind <u>keine</u> $FO[\sigma]$-Formeln:

- $(\dot{f}(v_0, v_1) \doteq \dot{c})$
- $\exists \dot{c}\, f(v_0, \dot{c}) \doteq v_0$
- $(\forall v_2 (f(v_2, \dot{c}) \doteq v_2))$

(b) Sei $\sigma_{Graph} = \{\dot{E}\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol besteht. Folgendes ist eine $FO[\sigma_{Graph}]$-Formel:

$$\forall v_0 \forall v_1 \left(\left(\dot{E}(v_0, v_1) \wedge \dot{E}(v_1, v_0) \right) \to v_0 \doteq v_1 \right)$$

Intuition zur Semantik:

In einem Graphen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ sagt diese Formel folgendes aus:

"für alle Knoten $a_0 \in A$ und
für alle Knoten $a_1 \in A$ gilt:
falls $(a_0, a_1) \in E^{\mathfrak{A}}$ und $(a_1, a_0) \in E^{\mathfrak{A}}$,
so ist $a_0 = a_1$".

Die Formel sagt in einem Graph $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ also gerade aus, dass die Kantenrelation $\dot{E}^{\mathfrak{A}}$ antisymmetrisch ist (vgl. Definition 4.65).

D.h.: Ein Graph $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ <u>erfüllt</u> die Formel genau dann, wenn die Kantenrelation $\dot{E}^{\mathfrak{A}}$ antisymmetrisch ist.

Notation 5.17

- Statt mit $v_0, v_1, v_2, \ldots$ bezeichnen wir Variablen oft auch mit $x, y, z, \ldots$ oder mit Varianten wie $x', y_1, y_2, \ldots$.

- Für gewisse 2-stellige Funktionssymbole wie $\dot{+}, \dot{\times} \in \sigma_{Ar}$ oder $\dot{\leq} \in \sigma_{Ord}$ verwenden wir <u>Infix- statt Präfixschreibweise</u> und setze Klammern dabei auf natürliche Weise, um die eindeutige Lesbarkeit zu gewährleisten.

  <u>Beispiel:</u> An Stelle des (formal korrekten) Terms $\dot{\times}(\dot{+}(x,y), z)$ schreiben wir $(x \dot{+} y) \dot{\times} z$.

  An Stelle der (formal korrekten) atomaren Formel $\dot{\leq}(x,y)$ schreiben wir $x \dot{\leq} y$.

Wir wissen nun, welche Zeichenketten (über dem Alphabet A_σ) <u>FO[σ]-Formeln</u> genannt werden (Syntax). Bevor wir die formale Definition der <u>Semantik</u> angeben, betrachten wir zunächst einige Beispiele, um ein "intuitives Verständnis" der Semantik zu bekommen.

5.4 Beispiele zur Semantik der Logik erster Stufe

Beispiel 5.18 (gerichtete Graphen)

Sei $\sigma_{Graph} = \{\dot{E}\}$, wobei $\dot{E}$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

(a) Die $FO[\sigma_{Graph}]$ - Formel

$$\varphi := \forall x \, \forall y \, \big(\dot{E}(x,y) \rightarrow \dot{E}(y,x) \big)$$

besagt:

"Für alle Knoten x und für alle Knoten y gilt: Falls es eine Kante von x nach y gibt, so gibt es auch eine Kante von y nach x".

Für jeden Graphen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ gilt daher:

$$\mathfrak{A} \text{ erfüllt } \varphi \iff \dot{E}^{\mathfrak{A}} \text{ ist symmetrisch}$$

Umgangssprachlich sagen wir auch:

"Die Formel φ sagt in einem Graphen $\mathfrak{A}$ aus, dass dessen Kantenrelation symmetrisch ist".

(b) Die folgende $FO[\sigma_{Graph}]$-Formel drückt aus, dass es von Knoten x zu Knoten y einen Weg der Länge 3 gibt:

$$\varphi(x,y) := \exists z_1 \exists z_2 \left(\left(E(x,z_1) \wedge E(z_1,z_2) \right) \wedge E(z_2,y) \right)$$

(c) Der $FO[\sigma]$-Satz

$$\forall x \forall y \exists z_1 \exists z_2 \left(\left(E(x,z_1) \wedge E(z_1,z_2) \right) \wedge E(z_2,y) \right)$$

sagt in einem Graphen $\mathfrak{A}$ aus, dass es zwischen je 2 Knoten einen Weg der Länge 3 gibt.

<u>Beispiel 5.19</u> (Verwandtschaftsbeziehungen)

Um Verwandtschaftsbeziehungen zu modellieren, können wir die Symbolmenge σ benützen, die aus den folgenden Symbolen besteht:

- 1-stellige Funktionen Vater, Mutter

  (Bedeutung: $x = \text{Vater}(y)$ besagt "x ist der Vater von y")

- 2-stellige Relationen Geschwister, Vorfahr

  (Bedeutung: Geschwister(x,y) besagt, dass x und y Geschwister sind,

  Vorfahr(x,y) besagt, dass x ein Vorfahr von y ist)

Generelles Wissen über Verwandtschaftsbeziehungen lässt sich durch Formeln der Logik erster Stufe repräsentieren, beispielsweise:

- "Personen mit gleichem Vater und gleicher Mutter sind Geschwister":

$$\forall x \forall y \Big(\big(\mathrm{Vater}(x) \doteq \mathrm{Vater}(y) \wedge \mathrm{Mutter}(x) \doteq \mathrm{Mutter}(y) \big) \rightarrow \mathrm{Geschwister}(x,y) \Big)$$

- "Eltern sind gerade die unmittelbaren Vorfahren":

$$\forall x \forall y \Big(\big(x \doteq \mathrm{Vater}(y) \vee x \doteq \mathrm{Mutter}(y) \big) \leftrightarrow \big(\mathrm{Vorfahr}(x,y) \wedge \neg \exists z \big(\mathrm{Vorfahr}(x,z) \wedge \mathrm{Vorfahr}(z,y) \big) \big) \Big)$$

- "Die Relation Vorfahr ist transitiv"

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\big(\mathrm{Vorfahr}(x,y) \wedge \mathrm{Vorfahr}(y,z) \big) \rightarrow \mathrm{Vorfahr}(x,z) \Big)$$

- Die folgende Formel $\varphi(x,y)$ besagt, dass x Tante oder Onkel von y ist:

$$\varphi(x,y) := \exists z \big(\mathrm{Geschwister}(x,z) \wedge (z \doteq \mathrm{Vater}(y) \vee z \doteq \mathrm{Mutter}(y)) \big)$$

- Die folgende Formel $\psi(x)$ besagt, dass x Vater von genau 2 Kindern ist:

$$\psi(x) := \exists y_1 \exists y_2 \Big(\big((x \doteq \mathrm{Vater}(y_1) \wedge x \doteq \mathrm{Vater}(y_2)) \wedge \neg y_1 \doteq y_2 \big) \wedge \forall z \big(x \doteq \mathrm{Vater}(z) \rightarrow (z \doteq y_1 \vee z \doteq y_2) \big) \Big).$$