

Diskrete Modellierung

WS 07/08

Prof. Dr. Nicole Schweikardt

J.W. Goethe-Univ. Frankfurt/M.

heute:

- Einführung ins Thema "Diskrete Modellierung"
- Organisatorisches
- Modellierung mit Wertebereichen

1. Einführung ins Thema "Diskrete Modellierung"

1.1 Wozu "Diskrete Modellierung" im Informatik-Studium?

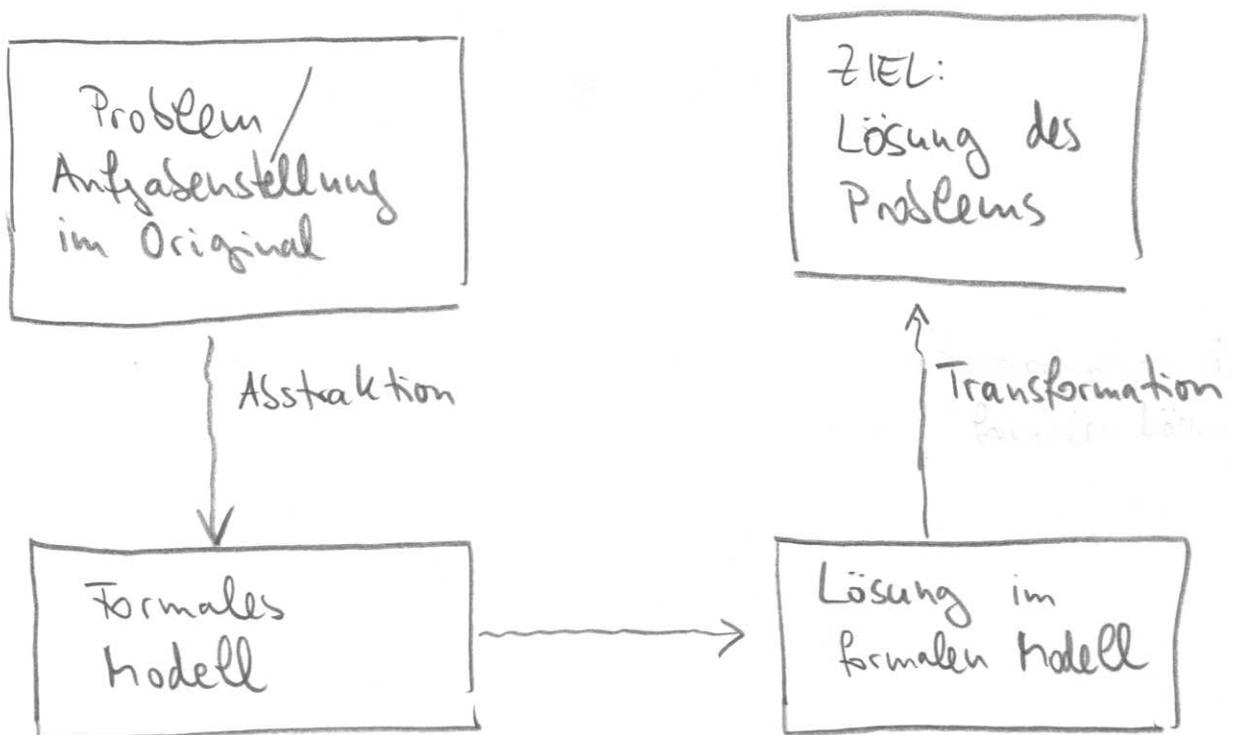
Typische Arbeitsmethode in vielen Bereichen der Informatik:

Modellierung von Problemen mittels diskreter Strukturen

⇒ präzise Beschreibung von Problemen

— dies ist Grundvoraussetzung dafür, Probleme systematisch mit Methoden der Informatik lösen zu können

Generelle Vorgehensweise in der Informatik:



Beispiel: Die Flussüberquerung

Aufgabe:

Ein Mann steht mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf am linken Ufer eines Flusses, den er überqueren will. Er hat ein Boot, das groß genug ist, ihn und ein weiteres Objekt zu transportieren, so dass er immer nur eins der drei mit sich hinübernehmen kann.

Falls der Mann allerdings den Wolf und die Ziege oder die Ziege und den Kohlkopf unbewacht an einem Ufer zurücklässt, so wird einer gefressen werden.

Ist es möglich, den Fluss zu überqueren, ohne dass die Ziege oder der Kohlkopf gefressen werden?

Beispiel 1.1

Problem "Flussüberquerung":

Ein Mann steht mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf am linken Ufer eines Flusses, den er überqueren will.

Er hat ein Boot, das gerade groß genug ist, ihn und ein weiteres Objekt zu transportieren, so dass er immer nur eines der drei mit sich hinübernehmen kann.

Falls der Mann allerdings den Wolf mit der Ziege oder die Ziege mit dem Kohlkopf unbewacht an einem Ufer zurücklässt, wird einer gefressen werden.

Ist es möglich, den Fluss zu überqueren, ohne dass die Ziege oder der Kohlkopf gefressen wird?

Lösungsansätze:

- 1. Knobeln → Lösung per "Geistesblitz"
- 2. Systematisches Vorgehen unter Verwendung von Informatik-Kalkülen

Hier: 2.

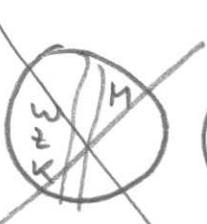
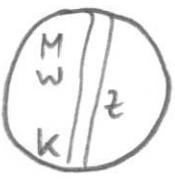
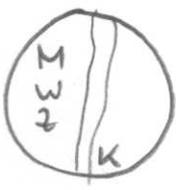
Erste Analyse des Problems:

- relevante Objekte:
Mann, Wolf, Ziege, Kohlkopf,
Boot, Fluss, Ufer (linkes und rechtes)
- Eigenschaften / Beziehungen:
 - Boot trägt Mann und zusätzlich maximal ein weiteres Objekt !!
 - unbewacht am gleichen Ufer \Rightarrow Wolf frisst Ziege, Ziege frisst Kohlkopf
- Tätigkeit:
überqueren des Flusses
- Start: Mann, Wolf, Ziege, Kohlkopf, (Boot)
am linken Ufer
- Ziel: Mann, Wolf, Ziege, Kohlkopf, (Boot)
am rechten Ufer

Abstraktionen:

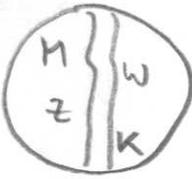
1. Nutze Abkürzungen:
- M $\hat{=}$ Mann,
 - W $\hat{=}$ Wolf,
 - Z $\hat{=}$ Ziege,
 - K $\hat{=}$ Kohlkopf

2. Betrachte die möglichen "Zustände", die auftreten dürfen:



unzulässig (W frisst z)

unzulässig (W frisst z)



unzulässig (z frisst K)

unzulässig (W frisst z)

3. Formale Modellierung der Zustände:

Repräsentiere den "Zustand" durch das Tupel $(\{M, z\}, \{W, K\})$.

Allgemein wird ein Zustand repräsentiert durch ein Tupel (l, r) mit $l \in \{M, W, z, K\}$ und $r \in \{M, W, z, K\}$, für das folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $e_{ur} = \{M, W, Z, K\}$
- $e_{nr} = \emptyset$
- falls $Z, K \in e$, so auch $M \in e$ } (um zu verhindern, dass K von Z gefressen wird)
- falls $Z, K \in r$, so auch $M \in r$ }
- (*) • falls $W, Z \in e$, so auch $M \in e$ } (um zu verhindern, dass Z von W gefressen wird)
- falls $W, Z \in r$, so auch $M \in r$ }

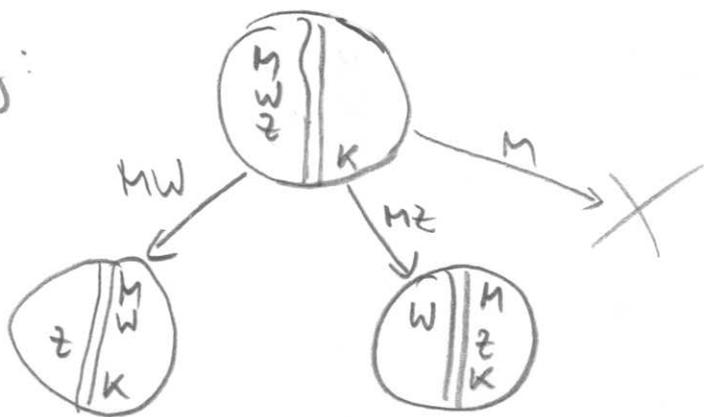
Übergänge von einem Zustand in einen anderen Zustand:

Vom Zustand $(\{M, W, Z\}, \{K\})$ aus kann man durch eine einzige Flussüberquerung in folgende Zustände gelangen:

- $(\{Z\}, \{M, W, K\})$, indem M und W im Boot fahren
- $(\{W\}, \{M, Z, K\})$, indem M und Z im Boot fahren

Beachte: Wenn M allein fährt, tritt die Situation $(\{W, Z\}, \{M, K\})$ auf — dies ist aber laut (*) kein zulässiger Zustand.

Graphische Darstellung:



Lösung des Problems "Flussüberquerung":

8

An diesem Bild lässt sich unser ursprüngliches Problem "Flussüberquerung" (Frage: Ist es möglich, den Fluss zu überqueren, ohne dass die Züge oder der Kohlkopf gefressen werden?) ganz leicht lösen, indem man einfach einen Weg vom "Startzustand" zum "Zielzustand" sucht.

Im Bild gibt es zwei verschiedene solche Wege; jeder davon kommt mit 7 Überfahrten aus.

Anmerkung:

Wir haben hier den Kalkül der Transitionssysteme (auch bekannt als endliche Automaten bzw. Zustandsübergangsdigramme oder Statecharts)

benutzt.

Dieser Kalkül eignet sich besonders gut, wenn Abläufe in Systemen mit Übergängen zwischen verschiedenen Zuständen beschrieben werden sollen.

Mehr dazu: in einem späteren Kapitel dieser Vorlesung.

Diskussion dieses Modellierungsbeispiels:

- Modellierung von Abläufen / Folgen von Schritten durch ein Zustandsübergangsdiagramm.
- Abstraktion: nur die Zustände und Übergänge interessieren
- relevante Objekte benannt: M, W, Z, K
- jeden Zustand haben wir hier repräsentiert durch ein Paar (L, R) von Mengen der Objekte (die sich am linken bzw rechten Ufer befinden)
- Einteilung in zulässige Zustände und unzulässige Zustände
- Übergänge werden mit den transportierten Objekten beschriftet

Besonders wichtig ist, was nicht modelliert wurde, weil es zur Lösung der Aufgabe irrelevant ist.

(z.B. Name, Breite, Tiefe des Flusses oder Länge, Geschwindigkeit des Boats etc.)

"Kreative Leistung": den Kalkül der Zustandsübergangsdiagramme wählen und die Bedeutung der Zustände und Übergänge festlegen

systematische Tätigkeit ("Routine-Arbeit"): das konkrete Zustandsübergangsdiagramm aufstellen und einen Weg vom Start- zum Zielzustand finden.

Ziele der Veranstaltung "Diskrete Modellierung"¹⁰

- Überblick über grundlegende Modellierungsmethoden und -kalküle
- Verständnis des konzeptionellen Kerns der Kalküle
- Fähigkeit, Kalküle an typischen Beispielen anzuwenden
- Fähigkeit zur präzisen und formalen Ausdrucksweise bei der Analyse von Problemen
- Erkenntnis des praktischen Werts präziser Beschreibungen

• Vorlesung des Originals unter Open Access
(z.B. aufmerksame, digitale Inhalte bei unvollständiger
Themenbearbeitung)

• Informations- und Kommunikationswissenschaften
• Informatik, System, System

1.2 Organisatorisches

Webseite der Vorlesung:

[www.informatik.uni-frankfurt.de/~rtkshp/
lehre/WS0708/DM](http://www.informatik.uni-frankfurt.de/~rtkshp/lehre/WS0708/DM)

Wichtig: regelmäßig draufschauen,

- unter "Aktuelles" werden wichtige Ankündigungen
(z.B. Verschiebung der Vorlesung in einen anderen
Hörsaal etc. gemacht)
- im Logbuch: Informationen zu den einzelnen
Vorlesungsstunden

Username:	modellierung
Password:	mod0708

- Inhalt der Vorlesung (Kapitelstruktur)

- Informationen zum Vorlesungsbetrieb:

- im Magnus Hörsaal: 8¹⁵ - 9⁴⁵
15 Minuten Pause
10⁰⁰ - 10⁴⁵

~~- Alternative, falls der Magnus Hörsaal zu klein ist:
Hörsaal V (~~#IV~~): 7³⁰ - 9⁰⁰
15 Minuten Pause
9¹⁵ - 10⁰⁰~~

- Übungen:

- Jede Woche 1 Übungsblatt mit 4 Aufgaben.

- Start: nächste Woche

Übungsblätter werden jeweils am Ende der Vorlesung ausgeteilt

- Abgabe Ihrer Lösungen:
am darauf folgenden Mittwoch zu Beginn der Vorlesung

Details dazu: nächste Woche!

- Dringende Empfehlung: Bearbeiten Sie die Übungsaufgaben: das hilft zum Verständnis des Vorlesungsstoffes und ist eine wichtige Vorbereitung auf die Klausur. Außerdem können Sie dadurch Bonuspunkte für die Klausur sammeln

- Einteilung in Übungsgruppen:

Es gibt insgesamt 7 Übungsgruppen, die von unseren Tutoren betreut werden.

Anmeldung für die Übungsgruppen:

Im 1. Stock dieses Gebäudes (Robert-Mayer-Str. 11-15), gegenüber von Raum 113 wird für jeden Übungstermin eine Liste ausgehängt, in die Sie sich eintragen können.

Wichtig: Jeder einzelne trägt sich bitte in genau eine der 7 Listen ein!

Der Anhang der Listen startet am Donnerstag, 18.10. um 8⁰⁰ Uhr und endet am Dienstag, 23.10. um 18⁰⁰ Uhr.

Beachte: Die ersten 20 Plätze der Mittwachs-Übungsgruppe sind für Studierende der kognitiven Linguistik reserviert

- Klausur: siehe www-Seite
- Literatur: siehe www-Seite

1.3 Allgemeiner Modellbegriff

- im allgemeinen Lexikon
- im Informatik-Lexikon

Modell (lat.: modulus, „Maß, Maßstab“)

allgemeines Muster, Vorbild, Entwurf

Beispielsweise:

- Abbild eines vorhandenen Originals (z.B. Schiffsmodell)
- Vorbild für ein herzustellendes Original (z.B. Gebäude in kleinem Maßstab; Vorbild in der Kunst)
- Konkretes Modell (z.B. Schiffsmodell) oder abstraktes Modell (z.B. Rentenmodell)

Modellbegriff im allgemeinen Lexikon

- Modell** [italien., zu lat. *modulus* „Maß, Maßstab“], allg. Muster, Vorbild, Entwurf.
- ▷ Mensch (auch Tier), der (das) als Vorbild für künstler. Studien oder Kunstwerke dient („sitzt“).
 - ▷ in der *Bildhauerei* meist in verkleinerter Form ausgeführter Entwurf einer Plastik oder Tonarbeit, die in Bronze gegossen werden soll. – 1 Architekturmodell.
 - ▷ in der *Modebranche* Bez. für 1. ein nur einmal oder in eng begrenzter Anzahl hergestelltes Kleidungsstück
 - ▷ im *Sprachegebrauch verschiedener Wiss.* (Philosophie, Naturwiss., Soziologie, Psychologie, Wirtschaftswiss., Politikwiss., Kybernetik u. a.) ein Objekt materieller oder ideeller (Gedanken-M.) Natur, das von einem Subjekt auf der Grundlage einer Struktur-, Funktions- oder Verhaltensanalyse für ein anderes Objekt (*Original*) eingesetzt und genutzt wird, um Aufgaben zu lösen, deren Durchführung unmittelbar am Original selbst nicht möglich bzw. zu aufwendig ist (z. B. Flugzeug-M. im Windkanal). Die **Modellmethode** vollzieht sich in vier Schritten: 1. Auswahl (Herstellung) eines dem [geplanten] Original entsprechenden M.; 2. Bearbeitung des M., um neue Informationen über das M. zu gewinnen (**Modellversuch**; 1 Ähnlichkeitssetze); 3. Schluß auf Informationen über das Original (meist Analogieschluß); ggf. 4. Durchführung der Aufgabe am Original. Infolge der Relationen zw. Subjekt, Original und M. (**Modellsystem**) ist ein M. einsetzbar u. a. zur Gewinnung neuer Informationen über das Original (z. B. Atom-M.), zur Demonstration und Erklärung (z. B. Planetarium), zur Optimierung des Originals (z. B. Netzplan), zur Überprüfung einer Hypothese oder einer techn. Konstruktion (z. B. Laborversuch). – Abweichend von diesem M.begriff versteht die *mathemat. Logik* unter M. eine Interpretation eines Axiomensystems, bei der alle Axiome dieses Systems wahre Aussagen darstellen. Diese **Modelltheorie** liefert grundlegende Verfahren zur Behandlung von Fragen der Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit und Definierbarkeit.

Wissenschaften
einschließlich
Informatik

mathematische
Logik

aus
Meyers Neues Lexikon, in zehn Bänden,
Meyers Lexikonverlag, 1993

Modellbegriff im Lexikon der Informatik

Modell → Gegenstandsraum

Modell (allgemeiner Begriff)

Teilgebiet: Modellierung
model (in general)

Während wir in den Formalwissenschaften wie Mathematik oder Physik einen präzisen Gebrauch des Wortes „Modell“ (→ *Gegenstandsraum*) vorfinden, wird das Modell-Denken in den Sozialwissenschaften weitgehend durch einen vagen Gebrauch des Ausdrucks „Modell“ gekennzeichnet. Folgende Begriffe, die sich in ihrer Intention oft stark unterscheiden, dürften die gebräuchlichsten Verwendungsweisen sein:

1. *Modell in der mathematischen Logik*
2. Modell als Bezeichnung für Theorien schlechthin
3. Modell als Resultat der Abbildung der Wirklichkeit.

Weitere Klassifizierungskriterien (→ *Klassifizierung*²) lassen sich nach dem Zweck, der mit den einzelnen Modellen verfolgt wird angeben (siehe Abb. S. 512).

Modell als Theorie schlechthin (2) findet sich häufig im verbalen Sprachgebrauch der Sozialwissenschaften. Insbesondere jene Teilklassen von Theorien, die mathematisiert, quantifiziert bzw. formalisiert sind, werden allgemein als Modell bezeichnet. Beispiele sind Preismodell, Rentenmodell.

Modelle als Abbild der Realität (3) stellen eine umfangreiche, sehr heterogene Klasse dar. Hierbei bilden die Beschreibungen ohne Verwendung einer Sprache, meist auf ein handliches Maß verkleinerten Nachbildungen eines vorgestellten Originals, die bekannteste Art von Modellen. Diese werden, wie z.B. der Globus, auch als ikonische oder materiale Modelle bezeichnet.

Stübel

Modell in der mathematischen Logik

Teilgebiet: Logik
model

Es gibt zwei unterschiedliche Definitionen für Modelle der mathematischen Logik:

- a) Eine Struktur Σ heißt Modell einer Formelmengens X , wenn jede Formel aus X in Σ gültig ist.
 - b) Das Paar (I, ζ) , bestehend aus einer Interpretation I und einer Belegung ζ , heißt Modell einer Formelmengens X , wenn jede Formel aus X bei I und ζ wahr ist.
- Für Mengen X von Aussagen, also Formeln ohne freie Variablen, sind beide Definitionen gleichwertig, da dann die Belegung keine Rolle spielt.

Die Modelltheorie beschäftigt sich mit gegenseitigen Beziehungen zwischen Aussagen formalisierter Theorien und mathematischen Strukturen, in denen die Aussagen gelten.

Müller: Stübel

Modell, abstrakt symbolisches

Teilgebiet: Modellierung
abstract symbolic model

Eine vor allem in der Betriebswirtschaft sehr verbreitete Klasse von Modellen bilden die abstrakt symbolischen Abbilder eines Realitätskomplexes. Dabei kann es sich sowohl um rein verbale Reproduktionen eines Systems handeln als auch um ein künstliches Sprachsystem, das durch zunächst inhaltlich leere symbolische Zeichen und syntaktische Regeln (*→ Syntax von Programmiersprachen*) Re-

Stübel

aus

H-J. Schneider: Lexikon der Informatik und

Datenverarbeitung, 3. Aufl., Oldenbourg Verlag, 1991

Beachte:

- Modelle sind absichtlich nicht originalgetreu. Sie heben bestimmte Eigenschaften hervor und lassen andere weg.
- Der intendierte Verwendungszweck des Modells bestimmt, welche Eigenschaften modelliert werden und welcher Kalkül dafür besonders geeignet ist

Beispiel 1.2 (a) Unterschiedliche Modelle, die beim Bau eines Hauses verwendet werden:

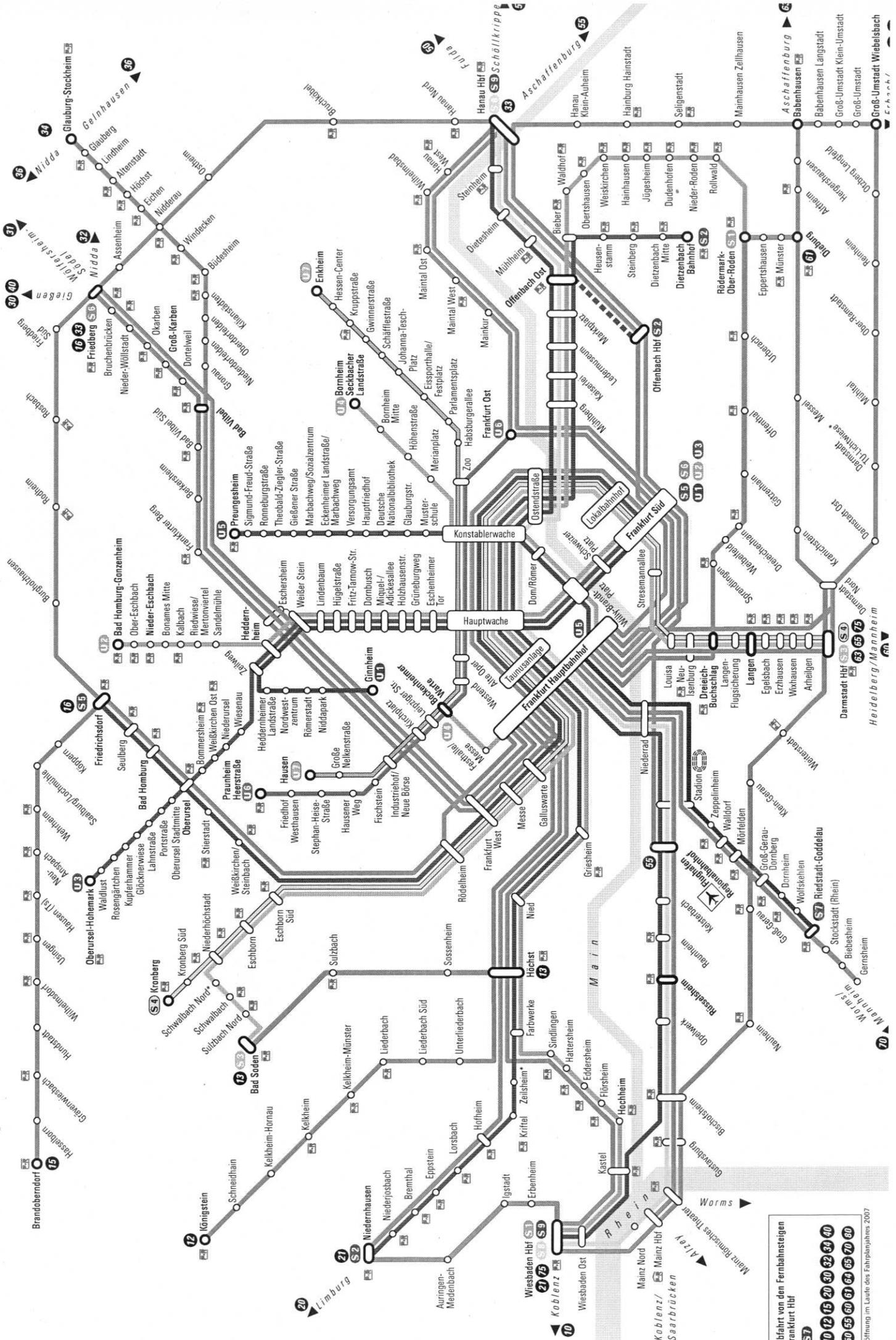
- Gebäudemodell: zur Vermittlung eines optischen Eindruckes
- Grundriss: zur Einteilung der Räume und des Grundstückes
- Kostenplan: zur Finanzierung

(b) Frankfurter S- und U-Bahn Netzplan

Ziel: Beschreibung, welche Haltestellen von welchen Linien angefahren werden und welche Umsteigemöglichkeiten es gibt

Vernachlässigt: genauere topografische Informationen (Entfernungen, genaue Lage, Straßenverläufe etc.), Abfahrtszeiten

Schnellbahnplan



Abfahrt von den Fernbahnsteigen
Frankfurt Hbf

S17
 10 12 15 20 30 32 34 40
 50 55 60 61 64 65 70 80

Eröffnung im Laufe des Fahrplangjahres 2007



U4

Frankfurt (Main) Seckbacher Landstraße

gültig vom 16.10.2007 bis 08.12.2007

Die RMV-Fahrplanauskunft wird täglich aktualisiert. Sie erhalten somit den jeweils uns bekannten aktuellen Stand. Beeinträchtigungen auf der Strecke und Sonderverkehre können zu Abweichungen vom Regelfahrplan führen. Hierüber informieren wir Sie gerne auch in unserem kostenlosen Newsletter. Oder besuchen Sie uns einfach auf www.rmv.de | Verkehrshinweise | Bus & Bahn aktuell.

Hauptweg

Frankfurt (Main) Bockenheimer Warte

01 Frankfurt (Main) Festhalle/Messe

03 Frankfurt (Main) Hauptbahnhof

04 Frankfurt (Main) Willy-Brandt-Platz

06 Frankfurt (Main) Dom/Römer

07 Frankfurt (Main) Konstablerwache

09 Frankfurt (Main) Merianplatz

10 Frankfurt (Main) Höhenstraße

11 Frankfurt (Main) Bornheim Mitte

12 Frankfurt (Main) Seckbacher Landstraße

Hauptweg

	Montag - Freitag					Samstag					Sonntag						
04	18	38	58			04	18	38	58			04	18	38	58		
05	18	28	38	45	53	05	18	38	58			05	18	38	58		
06	00	08	15	23	30	06	18	38	58			06	18	38	58		
	38	45	53														
07	00	08	13	18	23	07	08	18	28	38	48	07	18	38	58		
	28	33	38	43	48		58										
	53	58															
08	03	08	13	18	23	08	08	18	28	38	45	08	08	18	28	38	48
	28	33	38	43	48		53						58				
	53	58															
09	03	08	13	18	23	09	00	08	15	23	30	09	08	18	28	38	48
	30	38	45	53			38	45	53				58				
10	00	08	15	23	30	10	00	08	15	23	30	10	08	18	28	38	48
	38	45	53				38	45	53				58				
11	00	08	15	23	30	11	00	08	15	23	30	11	08	18	28	38	48
	38	45	53				38	45	53				58				
12	00	08	15	23	30	12	00	08	15	23	30	12	08	18	28	38	48
	38	45	53				38	45	53				58				
13	00	08	15	23	30	13	00	08	15	23	30	13	08	18	28	38	48
	38	45	53				38	45	53				58				
14	00	08	15	23	30	14	00	08	15	23	30	14	08	18	28	38	48
	38	45	53				38	45	53				58				
15	00	08	13	18	23	15	00	08	15	23	30	15	08	18	28	38	48
	28	33	38	43	48		38	45	53				58				
	53	58															
16	03	08	13	18	23	16	00	08	15	23	30	16	08	18	28	38	48
	28	33	38	43	48		38	48	58				58				
	53	58															
17	03	08	13	18	23	17	08	18	28	38	48	17	08	18	28	38	48
	28	33	38	43	48		58						58				
	53	58															
18	03	08	13	18	23	18	08	18	28	38	48	18	08	18	28	38	48
	28	33	38	43	48		58						58				
	53	58															
19	03	08	13	18	23	19	08	18	28	38	48	19	08	18	28	38	48
	28	33	38	45	53		58						58				
20	00	08	15	22	30	20	08	18	28	38	48	20	08	18	28	38	48
	38	48	58				58						58				

HAFAS/PF 3.2 Alle Angaben ohne Gewähr © Rhein-Main-Verkehrsverbund



Hotline (0,14 €/Minute)

01805/768 4636

R M V I N F O



Internet

www.rmv.de



WAP-Service

wap.rmv.de



Beratung vor Ort

Mobilitätszentralen

(c) Fahrplan der U4 an der Haltestelle "Bockenheimer Warte"

Ziel: Angabe der Abfahrtszeiten der U4 an der Haltestelle "Bockenheimer Warte" sowie Informationen darüber, wie viele Minuten die U4 von dort bis zu anderen Haltestellen auf ihrer Strecke braucht

□ Ende Beispiel 1.2

Arbeiten mit dem Modell:

- Nutzung des Modells bei der Lösung eines Problems (z.B. Beispiel 1.1 "Flussüberquerung")
- Bestimmte Aspekte eines komplexen Gebildes untersuchen und verstehen (z.B. Geschäftsabläufe in einer Firma)
- Verständigung zwischen Auftraggeber und Hersteller des Originals (z.B. Hausbau, Software-Entwicklung)
- Fixieren von Anforderungen für die Herstellung des Originals (z.B. Software: Spezifikation, Anforderungen)
- Durchführung von Operationen, die man am Original nicht durchführen kann (z.B. Erprobung einer neuen Flügelform im Windkanal oder Computer-Simulation)

- 17
- Validierung des Modells (engl: model checking)
Nachweis, dass die relevanten Eigenschaften des Originals korrekt und vollständig im Modell erfasst sind
(z.B. Prüfung, ob ein Finanzplan alle Kosten erfasst, sie korrekt aufsummiert und die vorgegebene Kostengrenze eingehalten wird)

Modellierte Aspekte:

Ein Modell beschreibt nur bestimmte Aspekte des Originals, z.B.

- Struktur / Zusammensetzung des Originals
(z.B. Organisationsschema einer Firma)

Dafür geeignete Kalküle: Wertebereiche,
Entity-Relationship-Modell, Bäume

- Eigenschaften von Teilen des Originals
(z.B. Farbe und Wert einer Spielkarte)

Dafür geeignete Kalküle: Wertebereiche, Logik,
Entity-Relationship-Modell

- Beziehungen zwischen Teilen des Originals
(z.B. "Wolf frisst Ziege, Ziege frisst Kohlkopf")

Dafür geeignete Kalküle: Graphen, Logik,
Entity-Relationship-Modell

- Verhalten des Originals unter Operationen
(z.B. aufeinanderfolgende Zustände bei
wiederholter Flussüberquerung)

Dafür geeignete Kalküle: Zustandsübergangsdiagramme,
Petri-Netze, Graphen, Algebren

2. Modellierung mit Wertebereichen

— mathematische Grundlagen und Bewerstechniken

Mathematische Notationen

$:=$	Definition eines Wertes, z.B.: $x := 5$, $M := \{1, 2, 3\}$
$:\Leftrightarrow$	Definition einer Eigenschaft oder einer Schreibweise z.B.: $m \in M :\Leftrightarrow m$ ist Element von M
ex.	es gibt, es existiert
f.a.	für alle, für jedes
\Rightarrow	impliziert z.B.: Regen \Rightarrow nasse Straße
\Leftrightarrow	genau dann wenn z.B.: Klausur bestanden $\Leftrightarrow z \geq 50\%$
\square	markiert das Ende eines Beweises