Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 13 – Beispiellösung

Aufgabe 1:

(a) **(i)**
- Menge der Zustände: $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$
- Startzustand: z_1
- Menge der akzeptierenden Zustände: $\{z_4\}$
- Die Übergangsfunktion δ ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\delta(z_1, a) &= z_2 \\
\delta(z_1, b) &= z_1 \\
\delta(z_2, a) &= z_2 \\
\delta(z_2, b) &= z_3 \\
\delta(z_3, a) &= z_4 \\
\delta(z_3, b) &= z_1 \\
\delta(z_4, a) &= z_4 \\
\delta(z_4, b) &= z_4
\end{aligned}
$$

Alternative Schreibweisen:

$$
\delta(q, x) = \begin{cases} z_1, & \text{falls } q \in \{z_1, z_3\} \text{ und } x = b \\ z_2, & \text{falls } q \in \{z_1, z_2\} \text{ und } x = a \\ z_3, & \text{falls } q = z_2 \text{ und } x = b \\ z_4, & \text{sonst} \end{cases}
$$

bzw.

δ	a	b
z_1	z_2	z_1
z_2	z_2	z_3
z_3	z_4	z_1
z_4	z_4	z_4

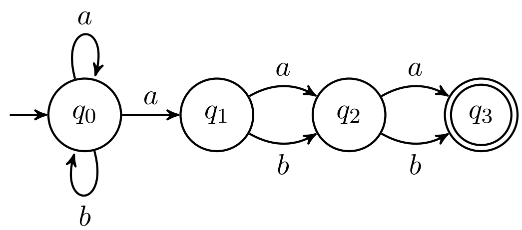
(ii)
- *bbaabba* wird *nicht* von A akzeptiert, denn bei Eingabe *bbaabba* durchläuft A die Zustände $z_1 \xrightarrow{b} z_1 \xrightarrow{b} z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{b} z_3 \xrightarrow{b} z_1 \xrightarrow{a} z_2$, und z_2 ist *kein* akzeptierender Zustand.
- *abbaaababbba* wird von A akzeptiert, denn bei Eingabe *abbaaababbba* durchläuft A die Zustände $z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{b} z_3 \xrightarrow{b} z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{b} z_3 \xrightarrow{a} z_4 \xrightarrow{b} z_4 \xrightarrow{b} z_4 \xrightarrow{b} z_4 \xrightarrow{a} z_4$, und z_4 ist ein akzeptierender Zustand.
- *aabbaab* wird *nicht* von A akzeptiert, denn bei Eingabe *aabbaab* durchläuft A die Zustände $z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{b} z_3 \xrightarrow{b} z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{b} z_3$, und z_3 ist *kein* akzeptierender Zustand.

(iii) *aba* ist ein möglichst kurzes Wort, das von A akzeptiert wird.

(*aba* ist sogar das kürzeste Wort, das von A akzeptiert wird, denn um vom Zustand z_1 in den Zustand z_4 zu gelangen, muss A vorher die Zustände z_2 und z_3 annehmen, also vorher mindestens drei Symbole lesen. Und das erreicht A am schnellsten, wenn er ausgehend vom Zustand z_1 nacheinander ein a, ein b und ein a liest.)

(iv) $L(A)$ besteht aus allen Wörtern über dem Alphabet $\{a, b\}$, die das Teilwort aba enthalten.

(b) Ein nicht-deterministischer endlicher Automat, der genau die Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$ akzeptiert, deren drittletzter Buchstabe ein a ist, ist z.B.:



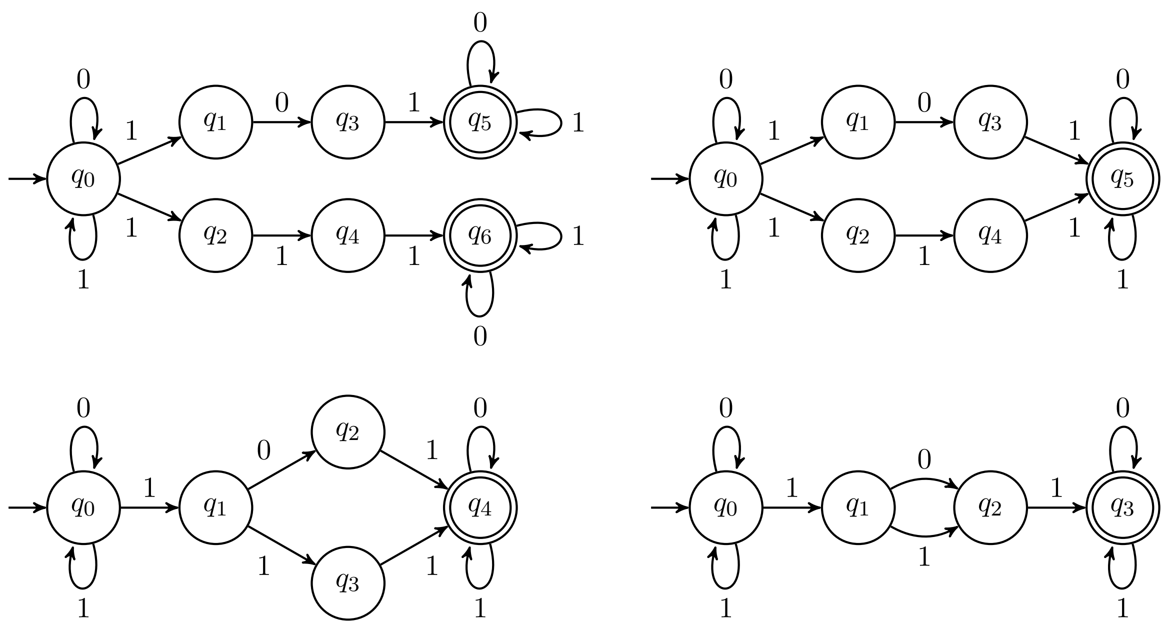
Aufgabe 2:

(a) $R = (0|1)^*(101\,|\,111)(0|1)^*$

(Für jedes Wort $w \in \{0,1\}^*$ gilt dann:

$$\begin{aligned} w \text{ enthält 101 oder 111 als Teilwort } &\iff w = xyz \text{ mit } x, z \in \{0,1\}^* \text{ und } y \in \{101, 111\} \\ &\iff w = xyz \text{ mit } x, z \in L((0|1)^*) \text{ und } y \in L(101\,|\,111) \\ &\iff w \in L(R)\ ) \end{aligned}$$

(b) Einige mögliche Automaten:



Aufgabe 3:

(a) $0\,|\,(1|\cdots|9)(0|1|\cdots|9)^*$

(Entweder die Zahl ist eine Null oder sie beginnt mit einer von 0 verschiedenen Ziffer.)

(b) **(i)** - Das Wort 1,99€ liegt in $L(R)$: das Teilwort vor dem Komma „passt“ zu dem regulären Ausdruck $(1|\cdots|9)(0|1|\cdots|9)^*$, insbesondere also auch zu $0\,|\,\big((1|\cdots|9)(0|1|\cdots|9)^*\big)$; das Teilwort ab dem Komma und ohne das abschließende € „passt“ zu dem regulären Ausdruck $,(0|1|\cdots|9)(0|1|\cdots|9)$, insbesondere also auch zu $\varepsilon\,|\,\big(,(0|1|\cdots|9)(0|1|\cdots|9)\big)$; insgesamt liegt das Wort 1,99€ also in $L(R)$.

- 01,99€ liegt *nicht* in $L(R)$, denn R verlangt, dass vor dem Komma entweder eine 0 steht oder eine Ziffernfolge, die mit einer von 0 verschiedenen Ziffer anfängt. Offensichtlich ist aber keine der beiden Bedingungen erfüllt.

- ,69€ liegt *nicht* in $L(R)$, denn dann müsste das Teilwort vor dem Komma zu dem regulären Ausdruck 0 oder zu dem regulären Ausdruck $(1|\cdots|9)(0|1|\cdots|9)^*$ „passen". Die durch die beiden Ausdrücke definierten Sprachen enthalten aber nur nicht-leere Wörter, während das Teilwort vor dem Komma leer ist.
- Das Wort 1€ liegt in $L(R)$, denn es „passt" zu dem Ausdruck $(1|\cdots|9)(0|1|\cdots|9)^*$€, insbesondere also zu $\big(0 \mid \big((1|\cdots|9)(0|1|\cdots|9)^*\big)\big)$ € und damit zu R.
- Das Wort 1,9€ liegt *nicht* in $L(R)$, denn nach dem Komma folgt nur *eine* Ziffer, R verlangt dort aber genau *zwei* Ziffern.
- Das Wort 1,09 liegt *nicht* in $L(R)$, denn es endet nicht mit dem Symbol €. R verlangt aber, dass das letzte Symbol ein € sein muss.

(ii) R beschreibt Euro-Preise ohne führende Nullen und mit entweder keiner oder genau zwei Nachkommastellen, d.h. $L(R)$ enthält alle Wörter über $\{0, 1, \ldots, 9, €\} \cup \{,\}$, die die Form

$$0€ \qquad x€ \qquad 0,y€ \qquad \text{oder} \qquad x,y€$$

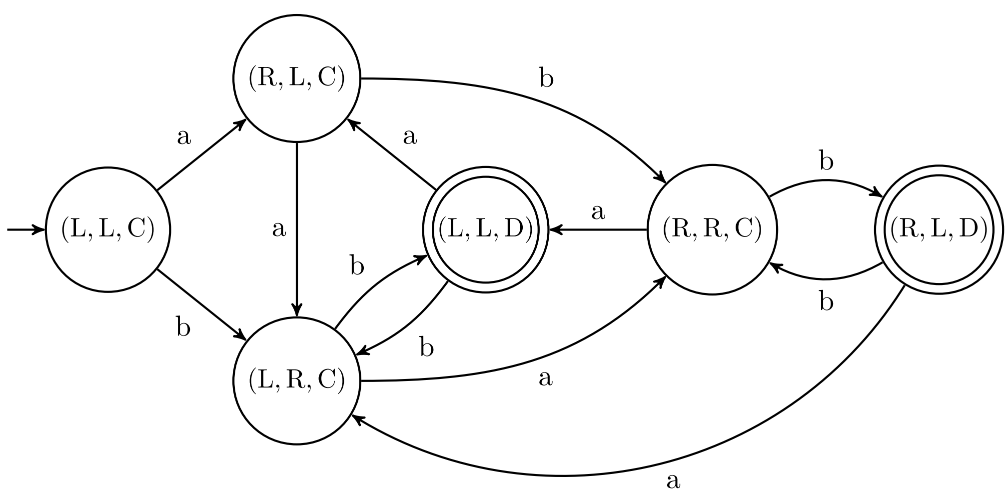
haben, wobei x eine natürliche Zahl ohne führende Null und y eine Folge von zwei Ziffern kodiert.

Aufgabe 4:

(a) Als Zustände wählen wir Tripel $(h_1, h_2, \ddot{o}) \in \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}^2 \times \{\mathrm{C}, \mathrm{D}\}$, wobei h_i angibt, ob die nächste Murmel, die an Hebel H_i ankommt, nach links ($h_i = \mathrm{L}$) oder rechts ($h_i = \mathrm{R}$) fällt, und $\ddot{o}$ angibt, ob die zuvor fallengelassene Murmel bei C ($\ddot{o} = \mathrm{C}$) oder D ($\ddot{o} = \mathrm{D}$) herausgerollt ist. Die akzeptierenden Zustände sind dann diejenigen Zustände $(h_1, h_2, \ddot{o})$ mit $\ddot{o} = \mathrm{D}$. Der Startzustand entspricht dem Tripel $(\mathrm{L}, \mathrm{L}, \mathrm{C})$.

Wenn im Zustand $(h_1, h_2, \ddot{o})$ das Symbol a bzw. b gelesen wird, dann entspricht dies dem Fallenlassen einer Murmel bei A bzw. B, wobei die Murmel an Hebel H_i in die durch h_i festgelegte Richtung fällt. Der Folgezustand spiegelt dann den Zustand der Hebel wieder, nachdem die Murmel aus einer der Öffnungen gerollt ist; außerdem gibt er die Öffnung an, aus der die Murmel herausgerollt ist. Wenn z.B. im Zustand (R, R, C) das Symbol a gelesen wird, dann heißt dies, dass die Murmel bei A fallengelassen wird, bei Hebel H_1 nach rechts fällt, dann auf Hebel H_2 trifft und auch dort nach rechts fällt und schließlich an der Öffnung D herauskommt. Da die Murmel auf die beiden Hebel H_1, H_2 trifft, werden diese umgestellt, so dass die nächste Murmel, die auf H_1 bzw. H_2 trifft, nach links fällt. Der Folgezustand von (R, R, C) beim Lesen von a ist also (L, L, D).

Insgesamt sieht der Automat wie folgt aus:



(b) - *abbab* wird akzeptiert: die Folge der Zustände, die bei dieser Eingabe durchlaufen wird, ist

$$(\mathrm{L},\mathrm{L},\mathrm{C}) \xrightarrow{a} (\mathrm{R},\mathrm{L},\mathrm{C}) \xrightarrow{b} (\mathrm{R},\mathrm{R},\mathrm{C}) \xrightarrow{b} (\mathrm{R},\mathrm{L},\mathrm{D}) \xrightarrow{a} (\mathrm{L},\mathrm{R},\mathrm{C}) \xrightarrow{b} (\mathrm{L},\mathrm{L},\mathrm{D}),$$

und $(\mathrm{L},\mathrm{L},\mathrm{D})$ ist ein akzeptierender Zustand.

- *aababba* wird *nicht* akzeptiert: die Folge der Zustände, die bei dieser Eingabe durchlaufen wird, ist

$$(\mathrm{L},\mathrm{L},\mathrm{C}) \xrightarrow{a} (\mathrm{R},\mathrm{L},\mathrm{C}) \xrightarrow{a} (\mathrm{L},\mathrm{R},\mathrm{C}) \xrightarrow{b} (\mathrm{L},\mathrm{L},\mathrm{D}) \xrightarrow{a} (\mathrm{R},\mathrm{L},\mathrm{C}) \xrightarrow{b} (\mathrm{R},\mathrm{R},\mathrm{C}) \xrightarrow{b} (\mathrm{R},\mathrm{L},\mathrm{D}) \xrightarrow{a} (\mathrm{L},\mathrm{R},\mathrm{C}),$$

und $(\mathrm{L},\mathrm{R},\mathrm{C})$ ist *kein* akzeptierender Zustand.

- *baba* wird *nicht* akzeptiert: die Folge der Zustände, die bei dieser Eingabe durchlaufen wird, ist

$$(\mathrm{L},\mathrm{L},\mathrm{C}) \xrightarrow{b} (\mathrm{L},\mathrm{R},\mathrm{C}) \xrightarrow{a} (\mathrm{R},\mathrm{R},\mathrm{C}) \xrightarrow{b} (\mathrm{R},\mathrm{L},\mathrm{D}) \xrightarrow{a} (\mathrm{L},\mathrm{R},\mathrm{C}),$$

und $(\mathrm{L},\mathrm{R},\mathrm{C})$ ist *kein* akzeptierender Zustand.