Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 11 – Beispiellösung

Aufgabe 1:

INDUKTIONSANFANG: $n = 4$
Behauptung: $2^4 \geq 4^2$
Beweis: $2^4 = 16 = 4^2$, also insbesondere $2^4 \geq 4^2$.

INDUKTIONSSCHRITT: $n \to n+1$
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ beliebig.
Induktionsannahme: $2^n \geq n^2$
Behauptung: $2^{n+1} \geq (n+1)^2$
Beweis: Es gilt

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{Ind.ann.}}{\geq} 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 \tag{1}$$

und

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1. \tag{2}$$

Wegen $n \geq 4$ gilt außerdem

$$n^2 = n \cdot n = (n-1) \cdot n + 1 \cdot n \geq 2 \cdot n + 1. \tag{3}$$

Insgesamt gilt also:

$$2^{n+1} \overset{(1)}{\geq} n^2 + n^2 \overset{(3)}{\geq} n^2 + 2 \cdot n + 1 \overset{(2)}{=} (n+1)^2. \qquad \square$$

Aufgabe 2:

(a) Eine aussagenlogische Formel ψ folgt aus einer aussagenlogischen Formel φ genau dann, wenn für jede zu φ und ψ passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt: Wenn $\mathcal{B}$ die Formel φ erfüllt, dann erfüllt $\mathcal{B}$ auch die Formel ψ.

(b) **(i)** Die Aussage stimmt.

Beweis, Variante 1: Durch Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned}
\big((\neg V_1 \wedge \neg V_2) \to \neg V_0\big) &\equiv \big(\neg(\neg V_1 \wedge \neg V_2) \vee \neg V_0\big) && \text{(Auflösen der Implikation)}\\
&\equiv \big((\neg\neg V_1 \vee \neg\neg V_2) \vee \neg V_0\big) && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv \big((V_1 \vee V_2) \vee \neg V_0\big) && \text{(doppelte Negation)}\\
&\equiv \big(\neg V_0 \vee (V_1 \vee V_2)\big) && \text{(Kommutativität)}\\
&\equiv \big(V_0 \to (V_1 \vee V_2)\big) && \text{(Einführung der Implikation)}
\end{aligned}$$

Beweis, Variante 2: Durch Aufstellen der Wahrheitstafel:

V_0	V_1	V_2	$(V_0 \to (V_1 \vee V_2))$	$((\neg V_1 \wedge \neg V_2) \to \neg V_0)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Man sieht, dass die Spalten für die beiden Formeln in der Wahrheitstafel identisch sind. Also sind die beiden Formeln äquivalent. □

(ii) Die Aussage stimmt nicht.

Beweis: Durch Angabe einer Belegung, bei der die Formeln verschiedene Wahrheitswerte liefern.

Sei $\mathcal{B}\colon \{V_0, V_1, V_2, V_3\} \to \{0,1\}$ eine Belegung mit $\mathcal{B}(V_0) = \mathcal{B}(V_3) = 0$ und $\mathcal{B}(V_1) = 1$. Dann ist

$$\Big[\!\!\Big[\Big(\big(V_0 \to (V_0 \to V_1)\big) \wedge V_1\Big)\Big]\!\!\Big]^{\mathcal{B}} = 1 \quad (\text{wegen } \mathcal{B}(V_0) = 0 \text{ und } \mathcal{B}(V_1) = 1),$$

aber

$$\Big[\!\!\Big[\Big(V_3 \wedge \Big(V_1 \leftrightarrow \big(V_3 \vee (V_1 \wedge V_2)\big) \Big) \Big)\Big]\!\!\Big]^{\mathcal{B}} = 0 \qquad (\text{wegen } \mathcal{B}(V_3) = 0).$$

Folglich sind die beiden Formeln nicht äquivalent. □

Aufgabe 3:

(a) Adjazenzmatrix:

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	1	1	0
3	1	1	0	0	0	1
4	0	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1	0	1
6	0	0	1	1	1	0

Adjazenzliste:

Knoten	Nachbarn
1	$(2, 3)$
2	$(1, 3, 4, 5)$
3	$(1, 2, 6)$
4	$(2, 5, 6)$
5	$(2, 4, 6)$
6	$(3, 4, 5)$

(b) Ein ungerichteter zusammenhängender Graph enthält genau dann einen Euler-Kreis, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.

(c) G_1 besitzt keinen Euler-Kreis.

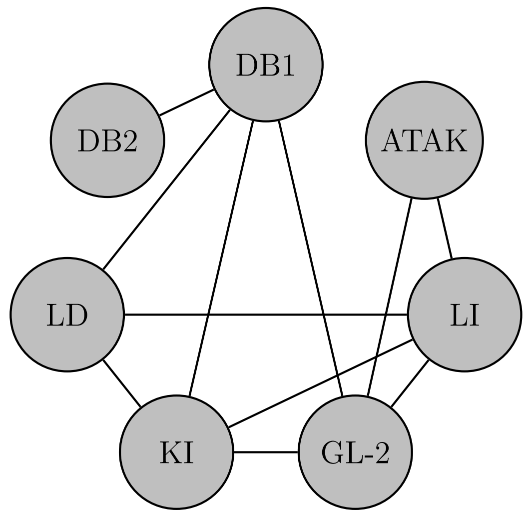
Beweis: G_1 ist ein ungerichteter, zusammenhängender Graph. Gemäß des Satzes von Euler besitzt G_1 genau dann einen Euler-Kreis, wenn der Grad jedes Knotens von G_1 gerade ist. G_1 besitzt aber Knoten, deren Grad ungerade ist – z.B. hat Knoten 3 den Grad 3. Somit kann G_1 keinen Euler-Kreis besitzen. □

G_2 besitzt einen Euler-Kreis, z.B. $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{d}, \mathrm{f}, \mathrm{e}, \mathrm{b}, \mathrm{f}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{a})$.

(d) G_1 und G_2 sind nicht isomorph, denn z.B. müsste ein Isomorphismus von G_1 nach G_2 den Knoten 3 aus G_1 auf einen Knoten aus G_2 abbilden, der denselben Grad hat wie der Knoten 3. Das ist aber nicht möglich, denn der Grad des Knotens 3 ist ungerade, und in G_2 haben alle Knoten geraden Grad.

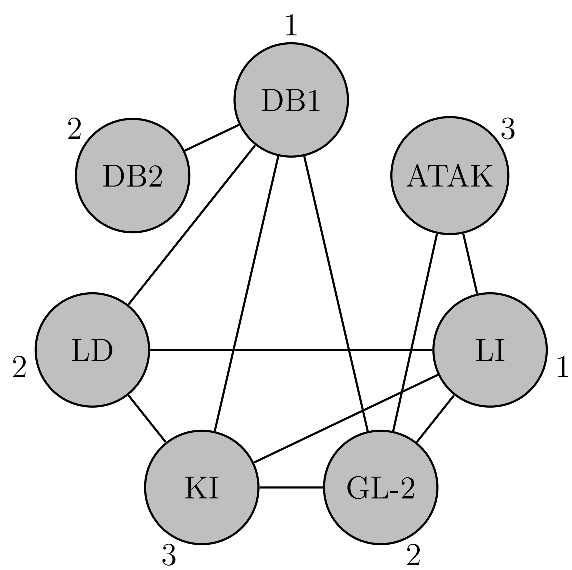
Aufgabe 4:

(a) Konfliktgraph:



(b)

v	$m(v)$
DB1	1
DB2	2
LD	2
KI	3
GL-2	2
LI	1
ATAK	3



(c) Wir benutzen die Knotenmarkierung m aus (b) und legen eine Lehrveranstaltungen x auf den Termin Nr. $m(x)$:

Termin 1 (z.B. Montag, 9–12 Uhr):	DB1, LI
Termin 2 (z.B. Dienstag, 9–12 Uhr):	DB2, LD, GL-2
Termin 3 (z.B. Donnerstag, 9–12 Uhr):	KI, ATAK

(d) Es werden mindestens drei Termine benötigt, denn z.B. formen die Knoten DB1, LD, KI des Konfliktgraphen ein Dreieck, und für dieses allein benötigt man schon drei Termine.

Aufgabe 5:

(a) (i) „FC Bayern München ist an mindestens zwei Spieltagen Tabellenführer, wird aber nicht Meister“ wird ausgedrückt durch die Formel

$$\Big(\ \exists x_1 \exists x_2 \Big(\neg x_1 \dot{=} x_2 \wedge \big(\dot{B}(x_1) \wedge \dot{B}(x_2) \big) \Big) \ \wedge \ \neg \dot{B}(\dot{letzter}) \ \Big).$$

„An keinem Spieltag kann mehr als eine der Mannschaften FC Bayern München, FC Schalke 04 bzw. Eintracht Frankfurt Tabellenführer sein“ wird ausgedrückt durch die Formel

$$\neg \exists x \Big(\ \Big(\big(\dot{B}(x) \wedge \dot{S}(x) \big) \vee \big(\dot{B}(x) \wedge \dot{F}(x) \big) \Big) \ \vee \ \big(\dot{S}(x) \wedge \dot{F}(x) \big) \ \Big).$$

(ii) Wenn Eintracht Frankfurt an den ersten 33 Spieltagen führt, dann wird Schalke Meister.

(b) φ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$, die zu φ und ψ passen, gilt: $\mathcal{I}$ erfüllt die Formel φ genau dann, wenn $\mathcal{I}$ die Formel ψ erfüllt.

(c) Um zu zeigen, dass die beiden Formeln äquivalent sind, müssen wir zeigen, dass für alle zu den beiden Formeln passenden σ-Interpretationen $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ gilt:

$$[\![(\ \exists x \dot{P}(x) \ \rightarrow \ \dot{P}(y) \ )]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad [\![\forall x \big(\dot{P}(x) \rightarrow \dot{P}(y) \big)]\!]^{\mathcal{I}} = 1.$$

Sei also $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine zu den beiden Formeln passende σ-Interpretation. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
[\![(\ \exists x \dot{P}(x) \ \rightarrow \ \dot{P}(y) \ )]\!]^{\mathcal{I}} = 1 &\Longleftrightarrow \text{wenn } [\![\exists x \dot{P}(x)]\!]^{\mathcal{I}} = 1, \text{ dann } [\![\dot{P}(y)]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \text{wenn es ein } a \in A \text{ gibt mit } a \in \dot{P}^{\mathfrak{A}}, \text{ dann } \beta(y) \in \dot{P}^{\mathfrak{A}} \\
&\Longleftrightarrow \text{für alle } a \in A \text{ gilt: wenn } a \in \dot{P}^{\mathfrak{A}}, \text{ dann } \beta(y) \in \dot{P}^{\mathfrak{A}} \\
&\qquad \text{(dafür ist wichtig, dass } A \neq \emptyset) \\
&\Longleftrightarrow \text{für alle } a \in A \text{ gilt: } [\![\big(\dot{P}(x) \rightarrow \dot{P}(y) \big)]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\
&\Longleftrightarrow [\![\forall x \big(\dot{P}(x) \rightarrow \dot{P}(y) \big)]\!]^{\mathcal{I}} = 1
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6:
Wir wählen den Satz

$$\varphi \ = \ \forall x \forall y \big(\ x \dot{<} y \ \rightarrow \ \exists z (x \dot{<} z \wedge z \dot{<} y) \ \big).$$

Der Satz besagt umgangssprachlich, dass zwischen je zwei verschiedenen Zahlen x, y eine weitere Zahl z liegt. Diese Bedingung ist in $\mathbb{R}$ erfüllt, denn für je zwei verschiedene Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ liegt die reelle Zahl $\frac{a+b}{2}$ zwischen a und b. Für $\mathbb{Z}$ ist die Bedingung aber nicht erfüllt, denn z.B. liegt zwischen 1 und 2 keine weitere ganze Zahl.