4. Graphen und Bäume

Bei Modellierungsaufgaben geht es oft darum, Objekte sowie Beziehungen zwischen Objekten zu beschreiben. Graphen und Bäume (Bäume sind Graphen mit bestimmten Eigenschaften) eignen sich dazu oft besonders gut.

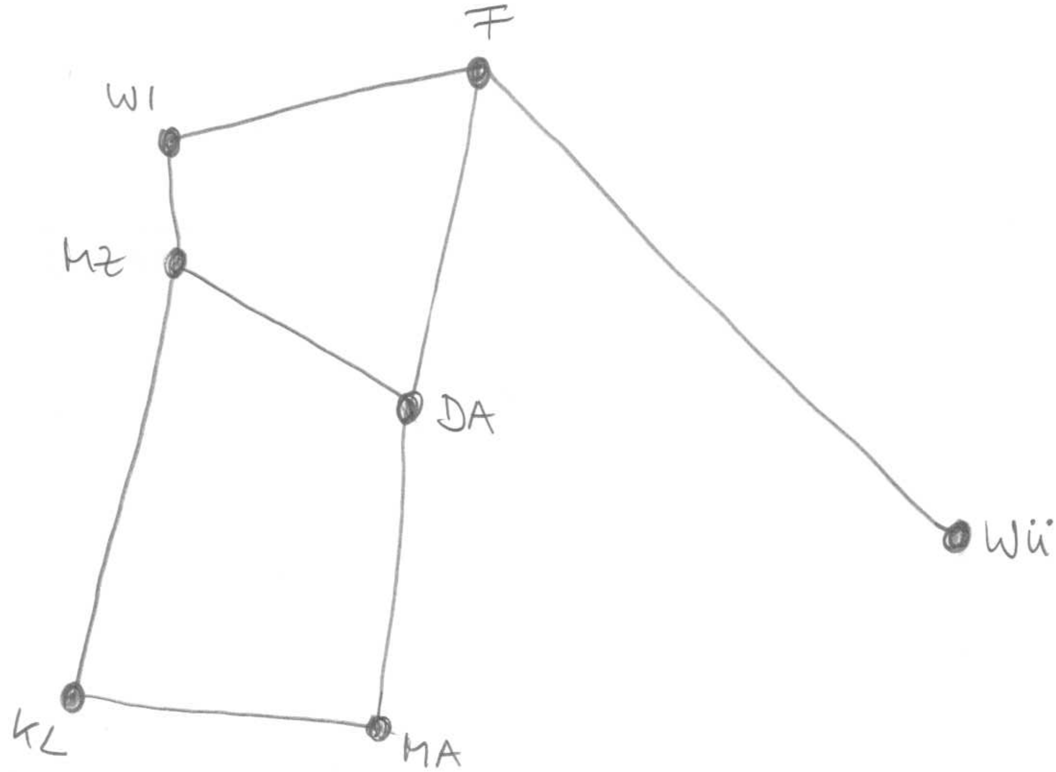
Anschaulich besteht ein Graph aus Knoten und Kanten:

- "Knoten" repräsentieren dabei "gleichartige Objekte"
- "Kanten" repräsentieren Beziehungen zwischen je zwei "Objekten".

Je nach Aufgabenstellung werden ungerichtete Graphen oder gerichtete Graphen verwendet.

Beispiel 4.1

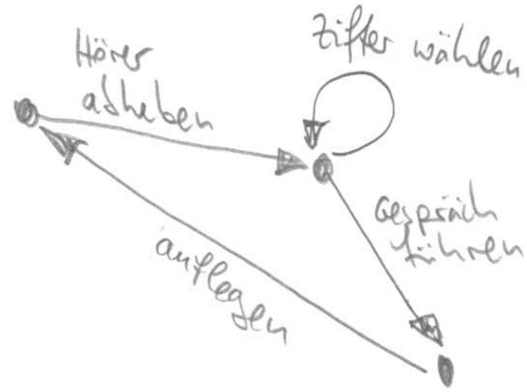
(a) Skizze eines ungerichteten Graphen, der die Autobahnverbindungen zwischen einigen Städten darstellt:



F ≙ Frankfurt
WI ≙ Wiesbaden
MZ ≙ Mainz
KL ≙ Kaiserslautern

DA ≙ Darmstadt
MA ≙ Mannheim
Wü ≙ Würzburg

(b) Skizze eines gerichteten Graphen, der den prinzipiellen Ablauf eines Telefonats darstellt:



4.1 Graphen

Grundlegende Definitionen

Definition 4.2 (ungerichteter Graph)

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V, die Knotenmenge von G genannt wird, und einer Menge

$$E \subseteq \{ \{i,j\} : i \in V,\ j \in V,\ i \neq j \},$$

die Kantenmenge von G genannt wird. Die Elemente aus V heißen Knoten von G (auch "Ecken"; englisch: vertices, singular: vertex); die Elemente aus E heißen Kanten von G (englisch: edges, singular: edge).

Beispiel 4.3:
$G = (V, E)$ mit

$V := \{ MZ, WI, MA, DA, KL, F, WÜ \}$ und

$$E := \{ \{MZ, WI\}, \{WI, F\}, \{F, DA\}, \{F, WÜ\}, \{MZ, DA\}, \{MZ, KL\}, \{KL, MA\}, \{D, MA\} \}$$

ist ein ungerichteter Graph, der die Autobahnverbindungen zwischen Mainz (MZ), Wiesbaden (WI), Mannheim (MA), Darmstadt (DA), Kaiserslautern (KL), Frankfurt (F) und Würzburg (WÜ) repräsentiert.

Beispiel 4.1 (a) zeigt diesen Graphen G in <u>graphischer Darstellung</u>: Knoten werden als Punkte dargestellt, Kanten als Verbindungslinien zwischen Punkten.

<u>Beachte</u>: Laut Definition 4.2 gibt es zwischen zwei Knoten i und j aus V

- <u>höchstens</u> eine Kante;
  diese wird mit $\{i,j\}$ bezeichnet und graphisch dargestellt als 

- <u>keine</u> Kante, falls $i = j$ ist.
  In der graphischen Darstellung eines ungerichteten Graphs sind also "Schleifen" der Form  <u>nicht</u> erlaubt.

Jede Kante $\{i,j\}$ eines ungerichteten Graphen ist also eine <u>2</u>-elementige Menge von Knoten des Graphen.

(<u>Bemerkung</u>: Diese Definition ungerichteter Graphen wird in den meisten Büchern verwendet. Im Buch von Kastens und Kleine-Büning werden davon abweichend in ungerichteten Graphen auch "Schleifen" der Form  erlaubt.)

Notation 4.4:

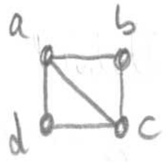
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Ein Knoten $v \in V$ heißt <u>intident</u> mit einer Kante $e \in E$, falls $v \in e$.
- Die beiden mit einer Kante $e \in E$ inzidenten Knoten nennen wir die <u>Endknoten von e</u>, und wir sagen, dass e diese beiden Knoten <u>verbindet</u>.
- Zwei Knoten $v, v' \in V$ heißen <u>benachbart</u> (bzw. <u>adjazent</u>), falls es eine Kante $e \in E$ gibt, deren Endknoten v und v' sind (dh $e = \{v, v'\}$).

Definition 4.5: (Grad)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und sei $v \in V$ ein Knoten von G.

Der <u>Grad von v in G</u> (engl.: degree), kurz: $\mathrm{Grad}_G(v)$, ist die Anzahl der Kanten, die v als Endknoten haben.
D.h.: $\mathrm{Grad}_G(v) := |\{e \in E : v \in e\}|$.
Der <u>Grad von G</u> ist $\mathrm{Grad}(G) := \max\{\mathrm{Grad}_G(v) : v \in V\}$, d.h. $\mathrm{Grad}(G)$ gibt den maximalen Grad eines Knotens von G an.

<u>Bsp:</u> $G =$ 

$\mathrm{Grad}_G(a) = 3$ $\mathrm{Grad}_G(b) = 2$ $\mathrm{Grad}(G) = 3$

$\mathrm{Grad}_G(d) = 2$ $\mathrm{Grad}_G(c) = 3$

Definition 4.6 (gerichteter Graph)

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V, die Knotenmenge von G genannt wird, und einer Menge

$$E \subseteq \{ (i,j) : i \in V, j \in V \},$$

die Kantenmenge von G genannt wird. Die Elemente aus V heißen Knoten (bzw "Ecken"), die Elemente aus E heißen (gerichtete) Kanten von G.

Beispiel 4.7

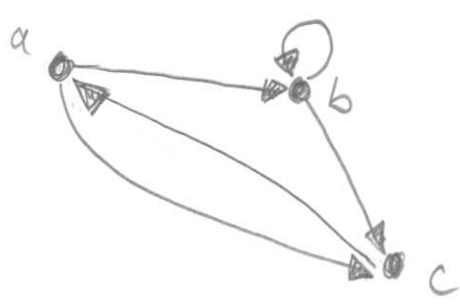
$G = (V, E)$ mit

$V := \{ a, b, c \}$ und

$E := \{ (a,b), (b,b), (b,c), (c,a), (a,c) \}$

ist ein gerichteter Graph.

Graphische Darstellung:



Knoten werden dabei als Punkte dargestellt;
eine Kante der Form (i,j) wird als Pfeil von Knoten i nach Knoten j dargestellt, also

.

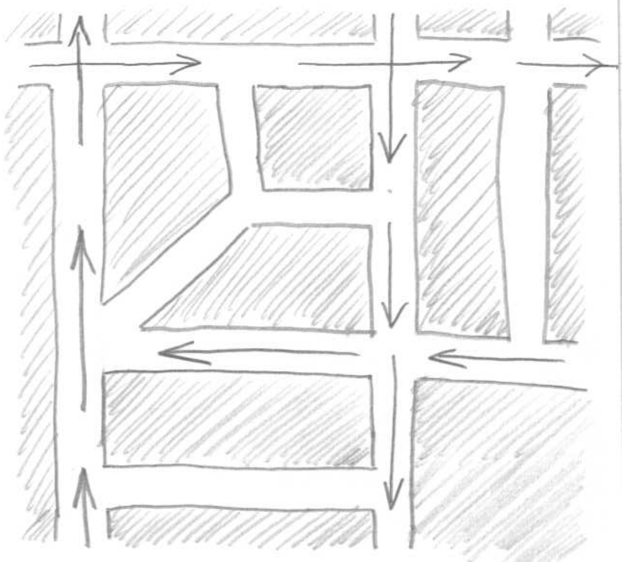
Notation 4.8

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

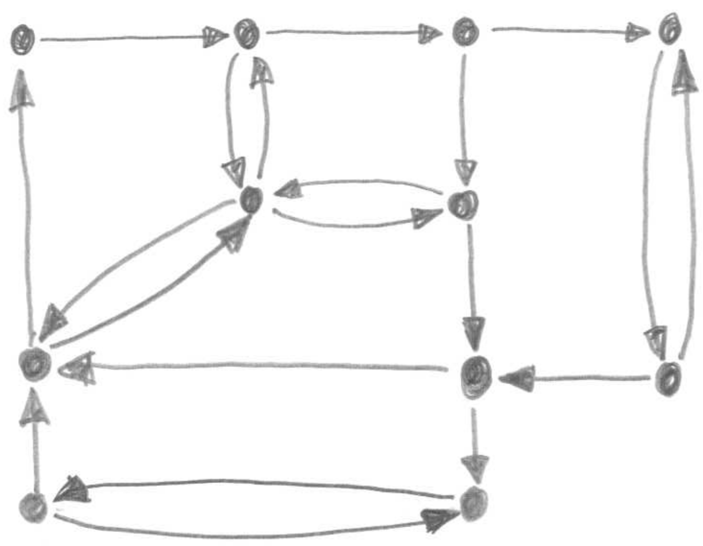
- Ist $e = (i, j) \in E$, so heißt
  i der Ausgangsknoten von e und j der Endknoten von e,
  und wir sagen, dass e von i nach j verläuft.
- Ein Knoten $v \in V$ heißt inzident mit einer Kante $e \in E$, falls v der Ausgangs- oder Endknoten von e ist.
- Zwei Knoten $v, v' \in V$ heißen benachbart (bzw. adjazent), falls $(v, v') \in E$ oder $(v', v) \in E$.
- Eine Kante der Form (v, v) (d.h. deren Ausgangs- und Endpunkt identisch ist), wird Schleife bzw. Schlinge genannt.

Beispiel 4.9: (Modellierung durch gerichtete Graphen)

In der folgenden Straßenkarte sind Einbahnstraßen durch Pfeile markiert.



Diese Straßenkarte können wir durch einen gerichteten Graphen repräsentieren, der für jede Straßenkreuzung einen Knoten enthält, und in dem es eine Kante von "Kreuzung" i zu "Kreuzung" j gibt, falls man von i nach j fahren kann, ohne zwischendurch eine weitere Kreuzung zu passieren. Graphisch lässt sich dieser gerichtete Graph folgendermaßen darstellen:



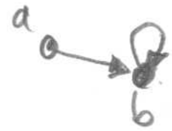
Weitere Beispiele zur Modellierung durch Graphen:

- Computer-Netzwerk:
  Knoten repräsentieren Computer; Kanten repräsentieren Netzwerkverbindungen
- das World Wide Web:
  Knoten repräsentieren Webseiten; Kanten repräsentieren Hyperlinks

Definition 4.10

Sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph und sei $v \in V$ ein Knoten von G.

- Der <u>Ausgangsgrad von v in G</u> (engl.: out-degree), kurz: $\text{Aus-Grad}_G(v)$, ist die Anzahl der Kanten, die v als Ausgangsknoten haben.
  D.h.: $\text{Aus-Grad}_G(v) := |\{e \in E : \text{es ex. } v' \in V \text{ s.d. } e=(v,v')\}|$
- Der <u>Eingangsgrad von v in G</u> (engl.: in-degree), kurz: $\text{Ein-Grad}_G(v)$, ist die Anzahl der Kanten, die v als Eingangsknoten haben.
  D.h.: $\text{Ein-Grad}_G(v) := |\{e \in E : \text{es ex. } v' \in V \text{ s.d. } e=(v',v)\}|$.

Bsp: $G=$ 

$\text{Ein-Grad}_G(a)=0$ $\quad$ $\text{Aus-Grad}_G(a)=1$

$\text{Ein-Grad}_G(b)=2$ $\quad$ $\text{Aus-Grad}_G(b)=1$

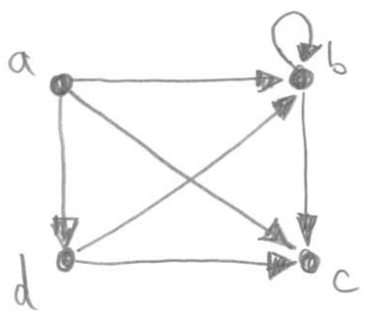
Bemerkung 4.11 (Darstellung von Graphen)

Es gibt mehrere Arten, Graphen darzustellen, zum Beispiel

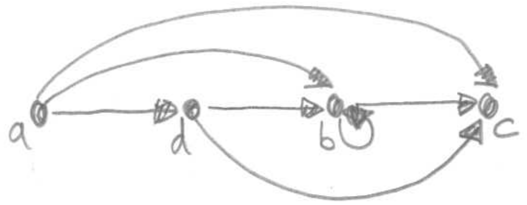
- abstrakt, durch Angabe der Knotenmenge V und der Kantenmenge E

  Beispiel: $G_1=(V_1,E_1)$ mit
  $V_1=\{a,b,c,d\}$ und
  $E_1=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(d,b),(d,c)\}$

- <u>graphisch</u> (bzw <u>anschaulich</u>). Der Beispiel-Graph G_1 wird graphisch dargestellt durch:



oder, äquivalent dazu, durch

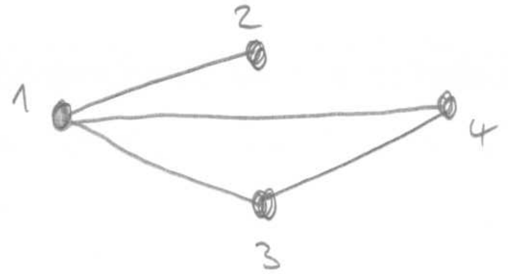


- durch Angabe einer <u>Adjazenzliste</u>, die zu jedem Knoten i eine Liste aller Knoten angibt, zu denen eine von i ausgehende Kante führt.
Der Beispiel-Graph G_1 wird durch folgende Adjazenzliste repräsentiert:

Knoten	Nachbarn
a	(b, c, d)
b	(b, c)
c	()
d	(b, c)

Auf die gleiche Art können auch <u>ungerichtete</u> Graphen durch eine Adjazenzliste repräsentiert werden.

Beispielsweise der Graph $G_2 :=$



durch die Adjazenzliste

Knoten	Nachbarn
1	(2, 3, 4)
2	(1)
3	(1, 4)
4	(1, 3)

- durch Angabe einer <u>Adjazenzmatrix</u>, d.h. eine Tabelle, deren Zeilen und Spalten mit Knoten beschriftet ist, und die in der mit Knoten i beschrifteten Zeile und der mit Knoten j beschrifteten Spalte den Eintrag 1 hat, falls es eine Kante von Knoten i nach Knoten j gibt — und den Eintrag 0, falls es keine Kante von i nach j gibt.

Adjazenzmatrix von G_1:

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	0	0
d	0	1	1	0

Adjazenzmatrix von G_2:

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	0	0
3	1	0	0	1
4	1	0	1	0

Wege in Graphen

Definition 4.12

Sei $G = (V, E)$ ein (gerichteter oder ungerichteter) Graph.

(a) Ein Weg in G ist ein Tupel

$$(v_0, \dots, v_\ell) \in V^{\ell+1},$$

für ein $\ell \in \mathbb{N}$, so dass f.a. i mit $0 \leq i < \ell$ gilt:

- falls G ein gerichteter Graph ist, so ist $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- falls G ein ungerichteter Graph ist, so ist $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$

Das Tupel $(v_0, \dots, v_\ell)$ wird dann "ein Weg von v_0 nach v_ℓ" genannt; ℓ ist die Länge des Weges (d.h.: die Länge des Weges gibt gerade an, wie viele Kanten auf dem Weg durchlaufen werden).

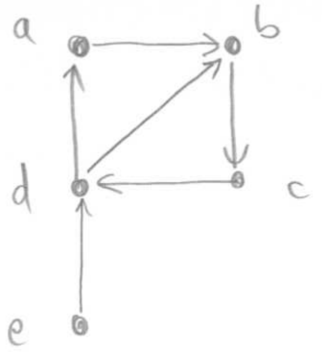
Beachte: Gemäß dieser Definition ist für jedes $v \in V$ das Tupel (v) ein Weg der Länge 0 von v nach v.

(b) Ein Weg heißt einfach, wenn kein Knoten mehr als einmal in dem Weg vorkommt

(c) Ein Weg $(v_0, \dots, v_\ell)$ heißt Kreis, wenn $\ell \geq 1$ und $v_\ell = v_0$ ist.

(d) Ein Kreis $(v_0, \dots, v_\ell)$ heißt einfach, wenn $(v_0, \dots, v_{\ell-1})$ ein einfacher Weg ist.

Beispiel 4.13

$G :=$ 

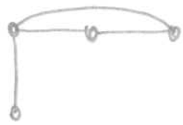
- (e, d, b, c, d) ist ein Weg der Länge 4, aber kein einfacher Weg
- (d, b, c, d) ist ein einfacher Kreis
- (e, d, a, b) ist ein einfacher Weg
- (b, d, a) ist kein Weg.
- (a, b, c, d, b, c, d, a) ist ein Kreis, aber kein einfacher Kreis.

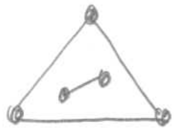
Definition 4.14

Ein gerichteter Graph heißt <u>azyklisch</u>, falls er keinen Kreis enthält. Solche Graphen werden im Englischen "directed acyclic graph", kurz: DAG, genannt.

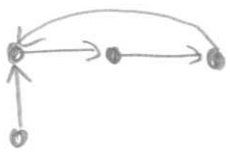
Definition 4.15 (zusammenhängend, stark zusammenhängend, orientierbar)

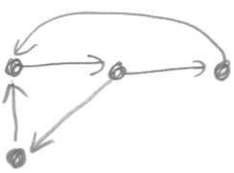
(a) Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt **zusammenhängend**, wenn für alle Knoten $v, w \in V$ gilt: Es gibt in G einen Weg von v nach w.

Beispiel:  ist zusammenhängend,

 ist nicht zusammenhängend

(b) Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt **stark zusammenhängend**, wenn für alle Knoten $v, w \in V$ gilt: Es gibt in G einen Weg von v nach w.

Beispiel:  ist nicht stark zusammenhängend (da es z.B. keinen Weg vom Knoten links oben zum Knoten links unten gibt)

 ist stark zusammenhängend

(c) Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt **orientierbar**, wenn man für jede Kante $e \in E$ eine Richtung so festlegen kann, dass der entstehende gerichtete Graph stark zusammenhängend ist.

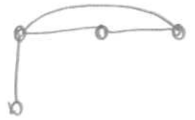
Beispiel:  ist orientierbar;  nicht.

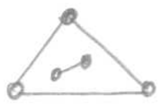
Definition 4.16 (Zusammenhangskomponente, starke Zusammenhangskomponente)

(a) Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph.
Ein Graph $G'=(V',E')$ heißt Zusammenhangskomponente von G, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) G' ist ein Teilgraph von G, d.h. $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$
2) G' ist zusammenhängend
3) Für jeden zusammenhängenden Teilgraphen $G''=(V'',E'')$ von G mit $V' \subseteq V''$ und $E' \subseteq E''$ gilt: $V'=V''$ und $E'=E''$.

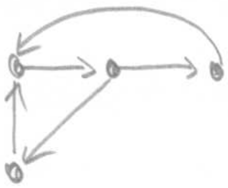
Beispiel:

$G =$  hat nur eine Zusammenhangskomponente, nämlich G selbst

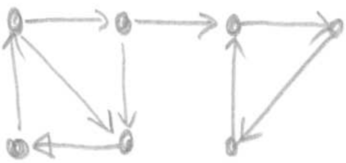
$G =$  hat zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich  und 

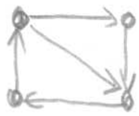
(b) Sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph
Ein Graph $G'=(V',E')$ heißt starke Zusammenhangskomponente von G, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
1) G' ist ein Teilgraph von G
2) G' ist stark zusammenhängend
3) Für jeden stark zusammenhängenden Teilgraphen $G''=(V'',E'')$ von G mit $V' \subseteq V''$ und $E' \subseteq E''$ gilt: $V'=V''$ und $E'=E''$.

Beispiel:

$G =$  hat nur eine starke Zusammenhangskomponente, nämlich G selbst.

$G =$  hat zwei starke Zusammenhangskomponenten, nämlich  und 

$G =$  hat zwei starke Zusammenhangskomponenten, nämlich

 und 

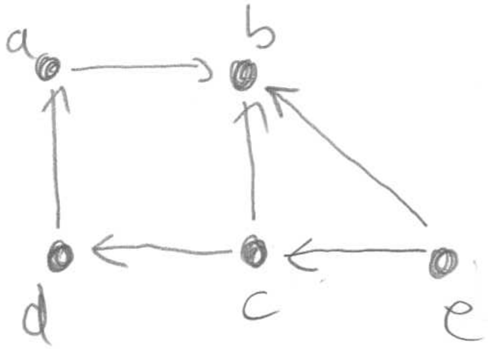
Definition 4.17 (Hamilton-Kreis und Hamilton-Weg)

Sei $G=(V,E)$ ein (gerichteter oder ungerichteter) Graph

(a) Ein Weg $W=(v_0,\dots,v_\ell)$ heißt Hamilton-Weg, wenn jeder Knoten aus V genau einmal in W vorkommt.

(b) Ein Weg $W=(v_0,\dots,v_\ell)$ heißt Hamilton-Kreis, wenn $\ell \geq 1$ und $v_\ell = v_0$ und $(v_0,\dots,v_{\ell-1})$ ein Hamilton-Weg ist.

Beispiel: Der Graph G



hat einen Hamilton-Weg, nämlich (e,c,d,a,b), aber keinen Hamilton-Kreis (da $\text{Aus-Grad}_G(b)=0$)

Ein Anwendungsbeispiel: Beim Problem des Handlungsreisenden (engl.: Travelling Salesman's Problem) geht es darum, eine Rundreise durch n Städte so durchzuführen, dass jede Stadt dabei genau 1 mal besucht wird. Es geht also darum, einen Hamilton-Kreis zu finden.

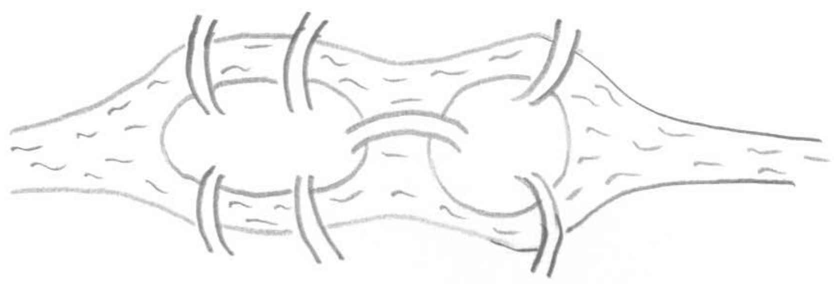
Das Problem, zu einem gegebenen Graphen zu entscheiden, ob er einen Hamilton-Kreis besitzt, ist algorithmisch ein schwieriges Problem:

man kann zeigen, dass es (genau wie das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem) NP-vollständig ist.

Im Gegensatz zu <u>Hamilton-Wegen</u> (bei denen es darum geht, einen Weg zu finden, der jeden <u>Knoten</u> des Graphen genau einmal besucht), geht es bei den im Folgenden betrachteten <u>Euler-Wegen</u> darum, einen Weg zu finden, der jede <u>Kante</u> des Graphen genau einmal besucht.

<u>Beispiel 4.18</u> (Königsberger Brückenproblem)

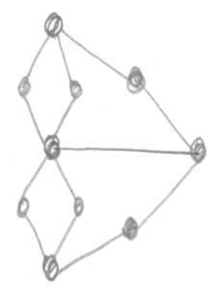
In der Stadt Königsberg gab es im 18. Jahrhundert 7 Brücken über den Fluss Pregel, die die Ufer und 2 Inseln miteinander verbanden. Skizze:



<u>Frage:</u> Gibt es einen Spaziergang, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

Die obige Skizze lässt sich folgendermaßen durch einen ungerichteten Graphen modellieren: für jedes Ufer, jede Insel und jede Brücke gibt es einen Knoten; Kanten zeigen direkte Verbindungen an. Die Skizze wird also durch folgenden Graphen repräsentiert:

$G_{\text{Königsberg}} :=$



Die Frage nach dem "Spaziergang" entspricht dann gerade der Frage: Gibt es in $G_{\text{Königsberg}}$ einen Euler-Kreis?

<u>Definition 4.19</u> (Euler-Kreise und Euler-Wege)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph

(a) Ein Weg $W = (v_0, \dots, v_\ell)$ heißt <u>Euler-Weg</u>, wenn W jede Kante aus E genau einmal enthält, d.h. wenn es für jedes $e \in E$ genau ein $i \in \{0, \dots, \ell-1\}$ gibt, so dass $e = \{v_i, v_{i+1}\}$.

(b) Ein Weg $W = (v_0, \dots, v_\ell)$ heißt <u>Euler-Kreis</u>, wenn W ein Euler-Weg ist und $v_0 = v_\ell$ ist.

Satz 4.20 (Existenz von Euler-Kreisen und Euler-Wegen)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph, dessen Knotenmenge endlich ist. Dann gilt:

(a) G besitzt einen Euler-Kreis $\iff$ jeder Knoten von G hat einen geraden Grad (d.h. ist mit einer geraden Anzahl von Kanten inzident)

(b) G besitzt einen Euler-Weg, der kein Euler-Kreis ist $\iff$ es gibt in G genau zwei Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis:

(a) "$\Longrightarrow$": Sei $K = (v_0, \dots, v_\ell)$ ein Euler-Kreis. Insbes.: $v_0 = v_\ell$.

Schritt 1: Jeder Knoten $v \in \{v_0, \dots, v_{\ell-1}\}$ hat geraden Grad,

denn: Sei $v \in \{v_0, \dots, v_{\ell-1}\}$ beliebig.

Zu jedem $i \in \{0, \dots, \ell-1\}$ mit $v = v_i$ gibt es im Euler-Kreis K zwei verschiedene Kanten, nämlich $\{v_{i-1}, v_i\}$ und $\{v_i, v_{i+1}\}$ (falls $i \neq 0$) bzw., falls $i = 0$, $\{v_0, v_1\}$ und $\{v_{\ell-1}, \underset{\overset{\shortparallel}{v_\ell}}{v_0}\}$.

Da der Euler-Kreis K jede Kante von G genau einmal enthält, gilt somit Folgendes: Ist $k = |\{i \in \{0, \dots, \ell-1\} : v = v_i\}|$ (d.h. k gibt an, wie oft v im Tupel $(v_0, \dots, v_{\ell-1})$ vorkommt), so ist $\text{Grad}_G(v) = 2 \cdot k$. Daher hat jeder Knoten $v \in \{v_0, \dots, v_{\ell-1}\}$ geraden Grad.

Schritt 2: $\{v_0, \ldots, v_{e-1}\} = V$,

denn: Laut Voraussetzung ist G zusammenhängend. Für beliebige Knoten $v, w \in V$ gilt daher: es gibt in G einen Weg von v nach w. Da K ein Euler-Kreis ist, enthält K sämtliche Kanten, die auf dem Weg von v nach w vorkommen. Insbesondere gilt also f.a. $v, w \in V$, dass $v, w \in \{v_0, \ldots, v_{e-1}\}$.

Schritt 3: Aus Schritt 1 und Schritt 2 folgt direkt, dass jeder Knoten von G geraden Grad hat.

"$\Longleftarrow$": Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad hat. Es sei

$$W = (v_0, \ldots, v_e)$$

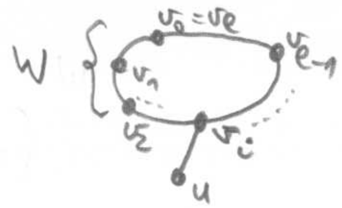
ein Weg maximaler Länge in G, der keine Kante(n) mehrfach enthält. Da wir W nicht mehr verlängern können, liegen alle mit v_e inzidenten Kanten auf W.
Da laut unserer Voraussetzung die Anzahl dieser Kanten gerade ist, folgt $v_e = v_0$. Zu zeigen: W ist ein Euler-Kreis.

Angenommen, W ist kein Euler-Kreis. Dann gibt es in G eine Kante e die nicht auf W liegt, die aber mit mindestens einem Knoten auf W inzident ist (um dies zu sehen, nutzen wir, dass G zusammenhängend ist). Sei v_i der zu e inzidente Knoten aus W und sei $u \in V$ der andere zu e inzidente Knoten, d.h. $e = \{u, v_i\}$.

Dann ist der Weg

$$W' := (u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{\ell-1}, v_0, v_1, \dots, v_i)$$

Skizze:



ein Weg der Länge $\ell+1$, der keine Kante(n) mehrfach enthält. Insbes. ist W' länger als W. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass W ein Weg maximaler Länge ist.

(b): Folgt leicht aus (a).
Details: Übung.

$\square$

Beispiel 4.21

Mit Hilfe von Satz 4.20 können wir das Königsberger Brückenproblem aus Beispiel 4.18 leicht lösen:

Es gibt keinen Spaziergang, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt, denn: ein solcher Spaziergang würde gerade einem Euler-Kreis im Graphen $G_{\text{Königsberg}}$ entsprechen.
Dieser Graph besitzt aber 4 Knoten von ungeradem Grad und kann daher laut Satz 4.20(a) keinen Euler-Kreis besitzen.

Beispiel 4.22

Frage: Kann man die Figur 

in einem Zug nachzeichnen?

Dh: Besitzt dieser Graph einen Euler-Weg?

Unter Verwendung von Satz 4.20 kann man die Frage leicht beantworten, indem man nachzählt, wie viele Knoten von ungeradem Grad es gibt.
Im obigen Graphen gibt es genau 2 Knoten von ungeradem Grad. Gemäß Satz 4.20 besitzt G also einen Euler-Weg, der kein Euler-Kreis ist.

Ähnlichkeit zweier Graphen

Die folgende Definition formalisiert, wann ein Graph G' in einem Graphen G "enthalten" ist:

Definition 4.23 (Teilgraph)

Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei (gerichtete oder ungerichtete) Graphen.

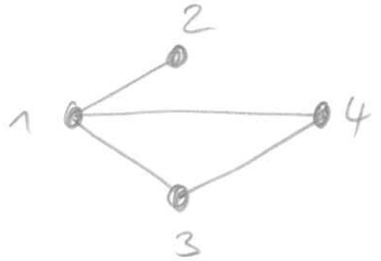
G' heißt Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

G' heißt induzierter Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$ und

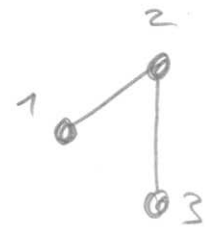
$$E' = \{ e \in E : \text{die mit } e \text{ inzidenten Knoten liegen in } V' \}$$

Beispiel 4.24

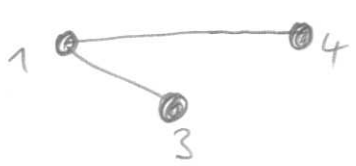
$G :=$



$G''' :=$



$G' :=$



G' ist ein Teilgraph von G, aber kein induzierter Teilgraph von G.

G'' ist ein induzierter Teilgraph von G

G''' ist kein Teilgraph von G.

$G'' :=$

Bemerkung 4.25

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ sind gleich (kurz: $G = G'$), falls sie dieselbe Knotenmenge und dieselbe Kantenmenge besitzen. D.h.:

$$G = G' \quad :\Longleftrightarrow \quad V = V' \text{ und } E = E'$$

Zwei Graphen G und G' sind "prinzipiell gleich" (Fachbegriff: isomorph, kurz: $G \cong G'$), falls G' aus G durch Umbenennung der Knoten entsteht.
Dies wird durch die folgende Definition präzisiert:

Definition 4.26 (Isomorphie von Graphen)

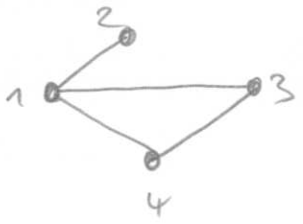
Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei (gerichtete oder ungerichtete) Graphen. G und G' heißen isomorph (kurz: $G \cong G'$, in Worten: G ist isomorph zu G'), falls es eine bijektive Abbildung $f : V \to V'$ gibt, so dass für alle Knoten $i \in V$ und $j \in V$ gilt:

- falls G und G' gerichtet sind:
  $$(i, j) \in E \iff (f(i), f(j)) \in E'$$
- falls G und G' ungerichtet sind:
  $$\{i, j\} \in E \iff \{f(i), f(j)\} \in E'$$

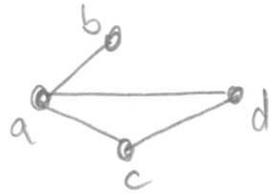
Eine solche Abbildung f wird Isomorphismus von G nach G' genannt.

Beispiel 4.27

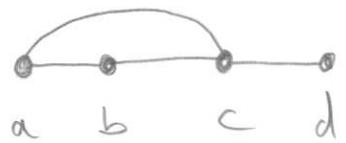
$G :=$



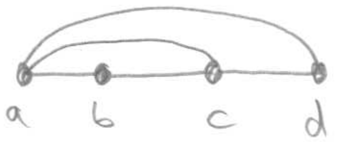
$G' :=$



$G'' :=$



$G''' :=$



Es gilt:

- $G \cong G'$ via $f: \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$ mit $f(1)=a$, $f(2)=b$, $f(3)=d$, $f(4)=c$
- $G \cong G''$ via $f: \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$ mit $f(1)=c$, $f(2)=d$, $f(3)=a$, $f(4)=b$
- G'' ist nicht isomorph zu G''', kurz: $G'' \not\cong G'''$, da G''' <u>mehr</u> Kanten als G'' hat.

Markierte Graphen

Bemerkung 4.28

Viele Modellierungsaufgaben erfordern, dass den Knoten oder den Kanten eines Graphen weitere Informationen zugeordnet werden. Dies wird durch so genannte <u>Markierungsfunktionen</u> für Knoten oder Kanten formalisiert. Eine <u>Knotenmarkierung</u> eines (gerichteten oder ungerichteten) Graphen $G=(V,E)$ ist eine Abbildung $MV: V \to WV$, wobei WV ein geeigneter Wertebereich ist. In dem Graph aus Beispiel 4.1(a) könnte man beispielsweise eine Knotenmarkierung

$$\text{Einwohnerzahl}: V \to \mathbb{N}$$

einführen, die jedem Knoten die Einwohnerzahl der zugehörigen Stadt zuordnet.

Eine <u>Kantenmarkierung</u> von G ist eine Abbildung $ME : E \to WE$, wobei WE ein geeigneter Wertebereich ist.

In dem Graph aus Beispiel 4.1 <u>(a)</u> könnte man beispielsweise eine Kantenmarkierung

$$\text{Entfernung} : E \to \mathbb{N}$$

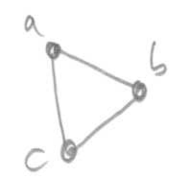
einführen, die jeder Kante die Länge (in km) des von der Kante repräsentierten Autobahnteilstücks zuordnet.

Kantenmarkierungen kann man auch dazu verwenden, um auszudrücken, dass es zwischen zwei Knoten mehr als eine Kante gibt: die Markierungsfunktion gibt dann an, für wie viele Verbindungen die eine Kante des Graphen steht.

<u>Definition 4.29</u> (Multigraph)

Ein <u>Multigraph</u> (G, m) besteht aus einem (gerichteten oder ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ und einer Kantenmarkierung $m : E \to \mathbb{N}$.

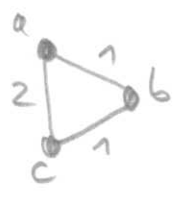
<u>Beispiel</u>: Multigraph (G, m) mit

$G =$ 

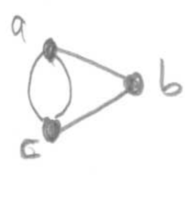
und

$m(\{a,b\}) = 1$
$m(\{b,c\}) = 1$
$m(\{c,a\}) = 2$

graphische Darstellung von (G, m):



bzw.



Zuordnungsprobleme

Beispiel 4.30

Typische Aufgabenstellungen:

(a) In einem Tennisverein sollen die Vereinsmitglieder für ein Turnier zu Doppelpaarungen zusammengestellt werden. Dabei möchte man jeweils nur befreundete Personen als "Doppel" zusammen spielen lassen.

(b) Eine Gruppe unterschiedlich ausgebildeter Piloten soll so auf Flugzeuge verteilt werden, dass jeder das ihm zugeteilte Flugzeug fliegen kann.

Beide Situationen lassen sich gut durch ungerichtete Graphen modellieren:

zu (a): Modelliere die Situation durch den Graphen

$G_T := (V_T, E_T)$ mit

$$V_T := \{ x : x \text{ ist ein Vereinsmitglied} \}$$

$$E_T := \{ \{x,y\} : x \text{ und } y \text{ sind befreundete Vereinsmitglieder} \}$$

Ziel: Finde eine größtmögliche Anzahl von Doppelpaarungen, d.h. finde eine möglichst große Menge $E' \subseteq E_T$, so dass kein Vereinsmitglied Endpunkt von mehr als einer Kante aus E' ist.

zu (b): Modelliere die Situation durch den Graphen

$G_F := (V_F, E_F)$ mit

$V_F := \{x : x \text{ ist ein Pilot}\} \dot\cup \{y : y \text{ ist ein Flugzeug}\}$

$E_F := \{\{x, y\} : \text{Pilot } x \text{ kann Flugzeug } y \text{ fliegen}\}$

Ziel: Stelle einen Flugplan auf, so dass jeder Pilot das ihm zugeteilte Flugzeug fliegen kann, d.h. finde eine möglichst große Menge $E' \subseteq E_F$, so dass kein Element aus V_F Endpunkt von mehr als einer Kante in E' ist.

Die gesuchten Kantenmengen E' aus (a) und (b) werden auch Matching genannt:

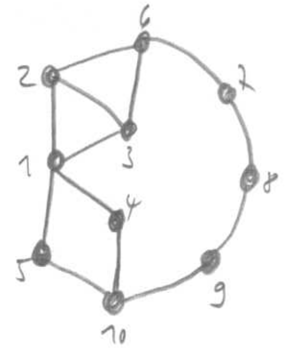
Definition 4.31

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Eine Kantenmenge $E' \subseteq E$ heißt Matching (bzw. Menge unabhängiger Kanten), falls gilt: kein Knoten aus V ist Endpunkt von mehr als einer Kante aus E'.

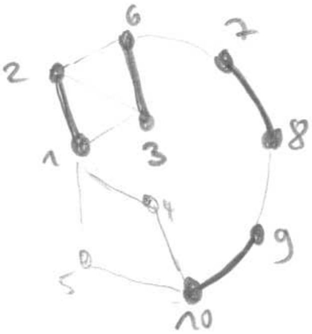
Ziel in Beispiel 4.30 (a) und (b) ist es, ein Matching maximaler Größe (d.h. eins, das so viele Kanten wie möglich enthält) zu finden.

Beispiel 4.32

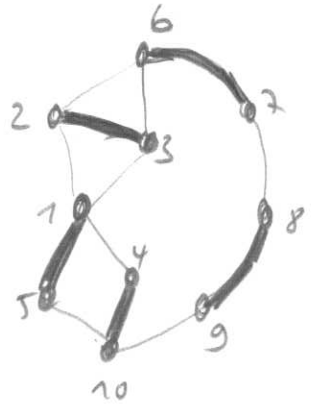
In einem Tennisverein mit 10 Mitgliedern und "Freundschaftsgraph" G_T =



sind z.B. die folgenden beiden Kantenmengen Matchings:



und



$E' = \{\{1,2\}, \{3,6\}, \{7,8\}, \{9,10\}\}$ $\quad$ $E'' := \{\{1,5\}, \{4,10\}, \{8,9\}, \{6,7\}, \{2,3\}\}$.

In Beispiel 4.30 (b) sollten Piloten auf Flugzeuge verteilt werden. Die Knotenmenge des zugehörigen Graphen G_F bestand aus zwei verschiedenen Arten von Objekten (nämlich einerseits Piloten und andererseits Flugzeuge), und Kanten konnten jeweils nur zwischen Objekten unterschiedlicher Art verlaufen (also zwischen Piloten und Flugzeugen, nicht aber zwischen Piloten und Piloten bzw. zw. Flugzeugen und Flugzeugen).

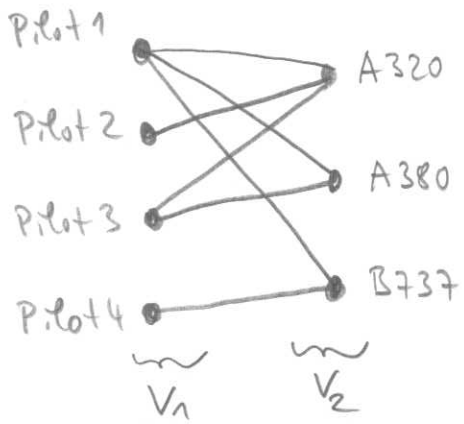
Solche Graphen werden <u>bipartite Graphen</u> genannt:

Definition 4.33

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt **bipartit**, wenn seine Knotenmenge V so in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 zerlegt werden kann, dass jede Kante aus E einen Endknoten in V_1 und einen Endknoten in V_2 hat.

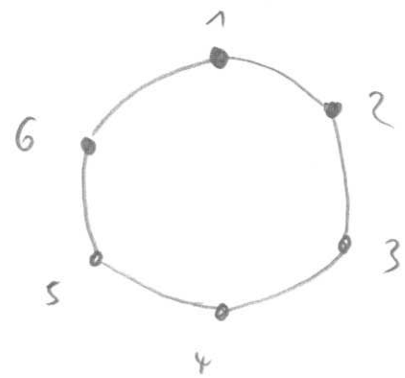
Beispiel 4.34

(a)



ist ein bipartiter Graph

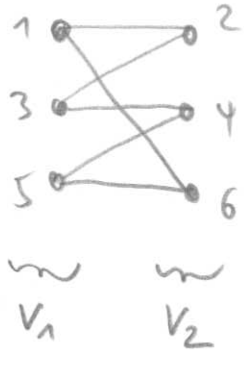
(b)

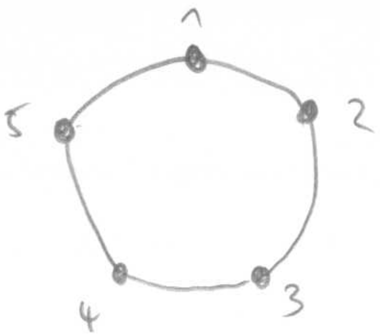


ist ein bipartiter Graph, denn wähle

$V_1 = \{1, 3, 5\}$, $V_2 = \{2, 4, 6\}$;

andere graphische Darstellung des Graphen:



(c) 

ist kein bipartiter Graph

(denn angenommen doch, seien V_1 und V_2 die beiden disjunkten Teilmengen der Knotenmenge, so dass jede Kante des Graphen einen Endknoten in V_1 und einen Endknoten in V_2 hat; OBdA nehmen wir an, dass $1 \in V_1$ ist. Dann muss aber gelten: $2 \in V_2$, $3 \in V_1$, $4 \in V_2$, $5 \in V_1$, also $V_1 = \{1, 3, 5\}$ und $V_2 = \{2, 4\}$. Aber: es gibt eine Kante zwischen 1 und 5, und beide Knoten gehören zu V_1. $\lightning$)

Allgemein gilt: Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und ist G ein Kreis auf n Knoten (wie in (b) für $n=6$ und in (c) für $n=5$), so gilt:

G ist bipartit $\Longleftrightarrow$ n ist gerade.

Ein weiteres typisches Beispiel für ein Zuordnungsproblem:

Beispiel 4.35

Die Gäste einer Familienfeier sollen so an einer hufeisenförmigen Tafel  platziert werden, dass niemand neben jemandem sitzt, den er nicht leiden kann.

Lösungsansatz:

Schritt 1: Stelle den Konfliktgraphen $G = (V, E)$ auf

mit $V = \{x :$ Person x soll zur Feier eingeladen werden$\}$

und $E = \{ \{x, y\} :$ Person x kann Person y nicht leiden oder Person y kann Person x nicht leiden$\}$

d.h.: Kanten im Konfliktgraphen zeigen auf, wer im Konflikt mit wem steht.

Schritt 2: Bilde das Komplement $\tilde{G} := (\tilde{V}, \tilde{E})$ des Konfliktgraphen, d.h. betrachte

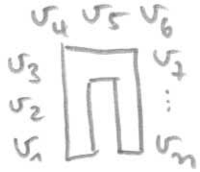
$\tilde{V} := V$

$\tilde{E} := \{ \{x, y\} : x, y \in V,\ x \neq y,\ \{x, y\} \notin E \}$

d.h.: Kanten in $\tilde{G}$ zeigen an, wer prinzipiell neben wem platziert werden könnte.

<u>Schritt 3</u>: Suche einen Hamilton-Weg in $\tilde{G}$.

Wenn $(v_1, \dots, v_n)$ (mit $n = |\tilde{V}|$) ein Hamilton-Weg in $\tilde{G}$ ist, dann kann man die Sitzordnung folgendermaßen festlegen:



Falls es in $\tilde{G}$ keinen Hamilton-Weg gibt, so weiß man, dass es <u>keine Möglichkeit gibt</u>, die geladenen Gäste so an einer hufeisenförmigen Tafel zu platzieren, dass niemand neben jemandem sitzt, den er nicht leiden kann.

Ein möglicher Ausweg: Verteile die Gäste auf <u>mehrere</u> Tische:

<u>Beispiel 4.36</u>

Die Gäste einer Familienfeier sollen so an mehreren (möglichst wenigen) Tischen platziert werden, dass Personen, die sich nicht ausstehen können, an verschiedenen Tischen sitzen.

Diese Aufgabe kann folgendermaßen modelliert werden: Die verfügbaren Tische werden durchnummeriert mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots$. Die geladenen Gäste und die herrschenden Konflikte zwischen Gästen werden durch den in Beispiel 4.35 betrachteten Konfliktgraphen $G = (V, E)$ repräsentiert.

Die Zuordnung, wer an welchem Tisch sitzen soll, wird durch eine Knotenmarkierung

$$m: V \to \mathbb{N}_{>0}$$

repräsentiert ($m(x) = i$ bedeutet dann, dass Person x an Tisch i sitzen soll).

Ziel: Finde eine konfliktfreie Knotenmarkierung $m: V \to \mathbb{N}_{>0}$, d.h. eine Knotenmarkierung, so dass für jede Kante $\{x, y\} \in E$ gilt: $m(x) \neq m(y)$.

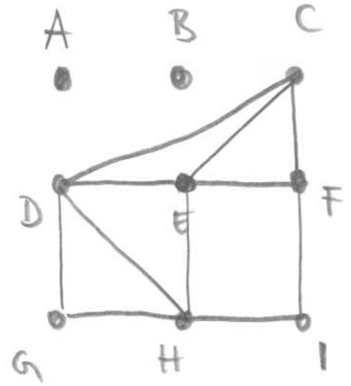
Dabei soll $|Bild(m)|$ möglichst klein sein (dies entspricht dem Ziel, die Gäste auf möglichst wenige Tische zu verteilen).

Definition 4.37

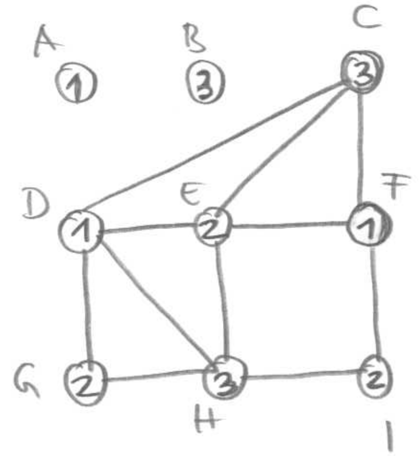
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Eine Funktion $m: V \to \mathbb{N}$ heißt konfliktfreie Knotenmarkierung (oder: konfliktfreie Färbung), wenn für jede Kante $\{x, y\} \in E$ gilt: $m(x) \neq m(y)$.

Beispiel 4.38

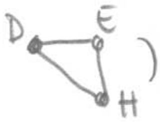
Familienfeier mit Gästen A, B, C, D, E, F, G, H, I und folgendem Konfliktgraphen



Eine konfliktfreie Knotenmarkierung (d.h. Platzierung an verschiedene Tische) $m : V \to \mathbb{N}$:



Hier ist für jeden Knoten $v \in V$ der Wert $m(v)$ in den Kreis geschrieben, der den Knoten v repräsentiert.

Für die hier gegebene Markierung m gilt $|\mathrm{Bild}(m)| = 3$, die Gäste werden also auf 3 Tische verteilt.
Dies ist "optimal", da der Konfliktgraph ein Dreieck (z.B. 

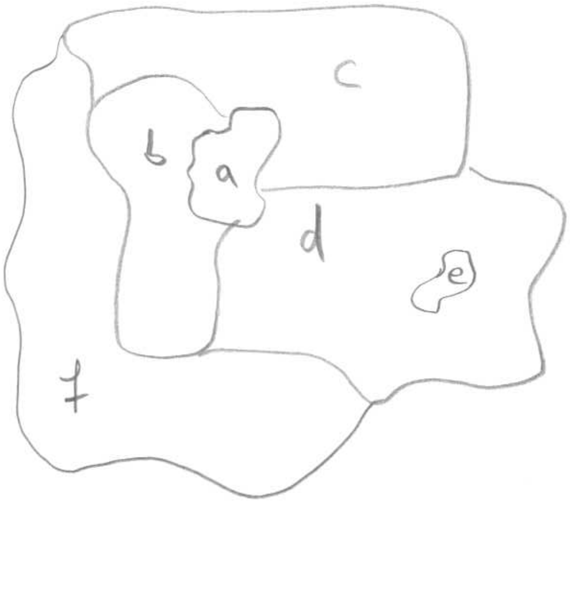
) als Teilgraph enthält — deshalb muss für jede konfliktfreie Knotenmarkierung m' gelten: $|\mathrm{Bild}(m')| \geq 3$.

Bemerkung 4.39

Die wohl berühmteste Aufgabe dieser Art von Markierungs- oder Färbungsaufgaben ist das so genannte 4-Farben-Problem. Dabei handelt es sich um die Hypothese, dass vier verschiedene Farben ausreichen, um eine Landkarte so einzufärben, dass zwei Staaten, die ein Stück gemeinsamer Grenze haben, durch unterschiedliche Farben dargestellt werden. Erst 1976 wurde diese Hypothese bewiesen, und zwar durch eine Fallunterscheidung mit mehr als 1.000 Fällen, die mit Hilfe eines Computerprogramms gelöst wurde.

Beispiel:

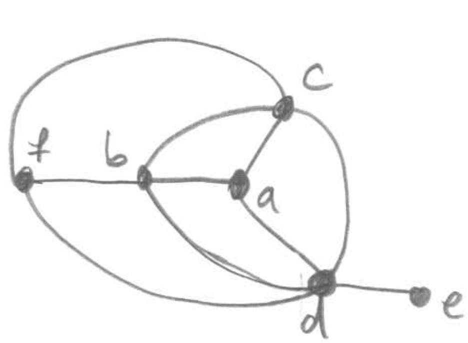
eine (kleine) Landkarte



zugehöriger Konfliktgraph:

Knoten $\hat{=}$ Staaten

Kanten $\hat{=}$ Staaten mit gemeinsamer Grenze



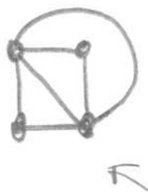
Da bei den vier Knoten a, b, c, d paarweise jeder zu jedem benachbart ist, muss eine konfliktfreie Färbung diesen 4 Knoten 4 verschiedene Farben zuordnen — für a, b, c, d etwa rot, gelb, grün, blau. Da f außerdem mit b, c, d benachbart ist, muss f dann wieder rot gefärbt sein. e kann jede Farbe außer blau erhalten.

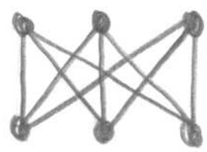
Die zu Landkarten gehörenden Konfliktgraphen haben eine besondere Eigenschaft: sie sind planar.

Definition 4.40

Ein Graph G heißt <u>planar</u>, wenn er so in die Ebene gezeichnet werden kann, dass seine Kanten sich nicht kreuzen.

Beispiel:

planare Graphen:  ,  (denn dieser Graph kann kreuzungsfrei so in die Ebene gezeichnet werden)

nicht-planare Graphen:  , 

Bemerkung 4.41

Die Anzahl verschiedener "Farben" bzw "Markierungen", die mindestens nötig sind, um einen Graphen $G=(V,E)$ konfliktfrei zu färben (bzw. markieren), nennt man auch die <u>chromatische Zahl</u> des Graphen, kurz: $\chi(G)$ ("chi(G)").

Präzise: $\chi(G) := \min \left\{ |\text{Bild}(m)| : \begin{array}{l} m: V \to \mathbb{N} \text{ ist eine} \\ \text{konfliktfreie Knotenmarkierung für } G \end{array} \right\}$

Beispiel 4.42:

Weitere Beispiele von Anwendungen, die durch Finden konfliktfreier Färbungen im Konfliktgraphen gelöst werden können:

Knoten	Kante zwischen x und y	Farbe bzw. Markierung
Staat auf Karte	haben gemeinsame Grenze	Farbe
Gast auf Familienfeier	können sich nicht leiden	Tischnummer
Vorlesung	haben gemeinsame Teilnehmer	Termin
Variable im Programm	ihre Werte werden gleichzeitig benötigt	Registerspeicher
Prozess	benötigen dieselben Ressourcen	Ausführungstermin

4.2 Bäume

Ungerichtete Bäume

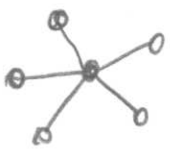
Definition 4.43

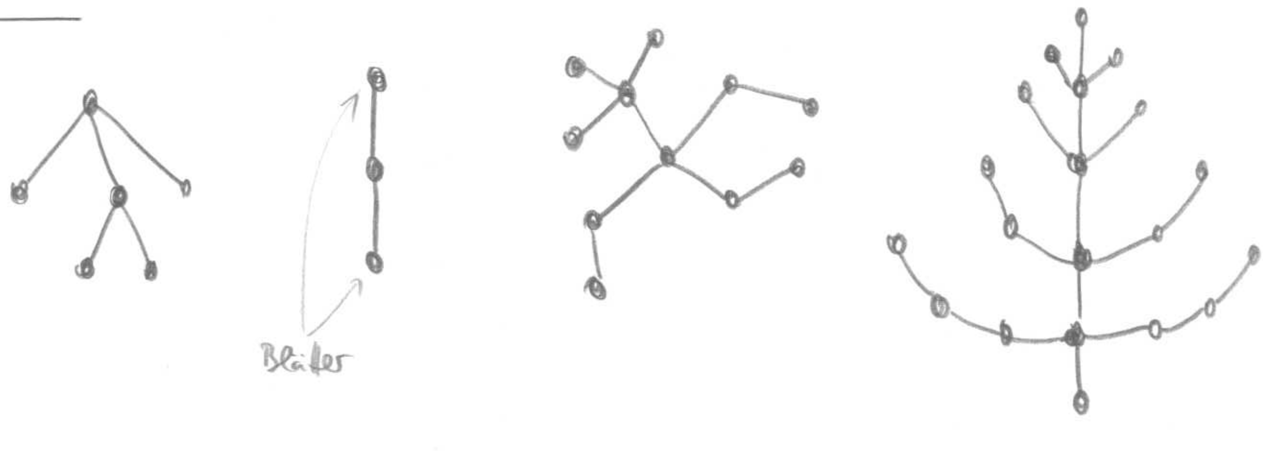
Ein <u>ungerichteter Baum</u> ist ein ungerichteter, zusammenhängender Graph $G=(V,E)$, der keinen einfachen Kreis enthält.

Diejenigen Knoten in V, die den Grad 1 haben, heißen <u>Blätter</u> des Baums.

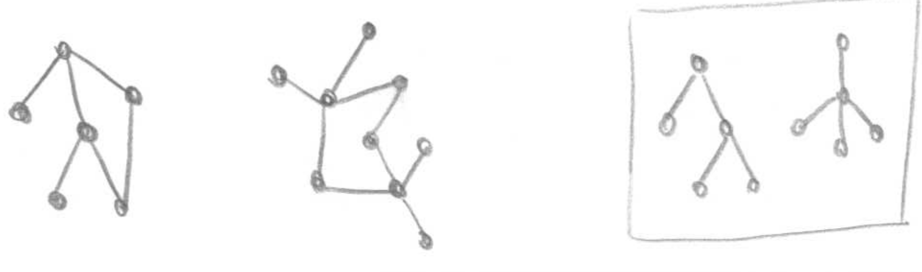
Beispiel 4.44

Bäume:





Keine Bäume:



Beobachtung 4.45

Sei $B = (V, E)$ ein ungerichteter Baum.
Da B zusammenhängend ist und keinen einfachen Kreis enthält,
gilt f.a. Knoten $x, y \in V$:

es gibt in B genau einen einfachen Weg von x nach y

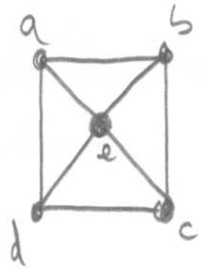
(denn: Da B zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen einfachen Weg von x nach y.
Angenommen, $(v_0, \dots, v_\ell)$ und $(v_0', \dots, v_{\ell'}')$ sind zwei verschiedene einfache Wege von x nach y. Insbes. gilt dann: $v_0 = x = v_0'$ und $v_\ell = y = v_{\ell'}'$. Skizze:

Dann ist aber $(v_0, \dots, v_\ell, v_{\ell'-1}', \dots, v_0')$ ein Kreis. Dieser Kreis enthält einen einfachen Kreis. Dann kann B aber kein Baum sein. ↯)

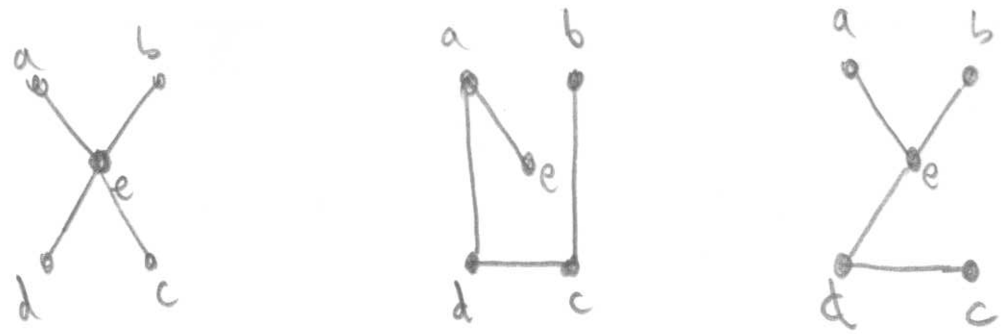
Definition 4.46

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt <u>Spannbaum von G</u>, falls G' ein ungerichteter Baum mit $V' = V$ und $E' \subseteq E$ ist.

Beispiel 4.47

Der Graph $G =$ 

hat z.B. folgende Spannbäume:



Satz 4.48

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dessen Knotenmenge endlich ist. Dann gilt:

Es gibt (mindestens) einen Spannbaum von G $\iff$ G ist zusammenhängend.

Beweis: "$\Rightarrow$": klar.

"$\Leftarrow$": Übung.

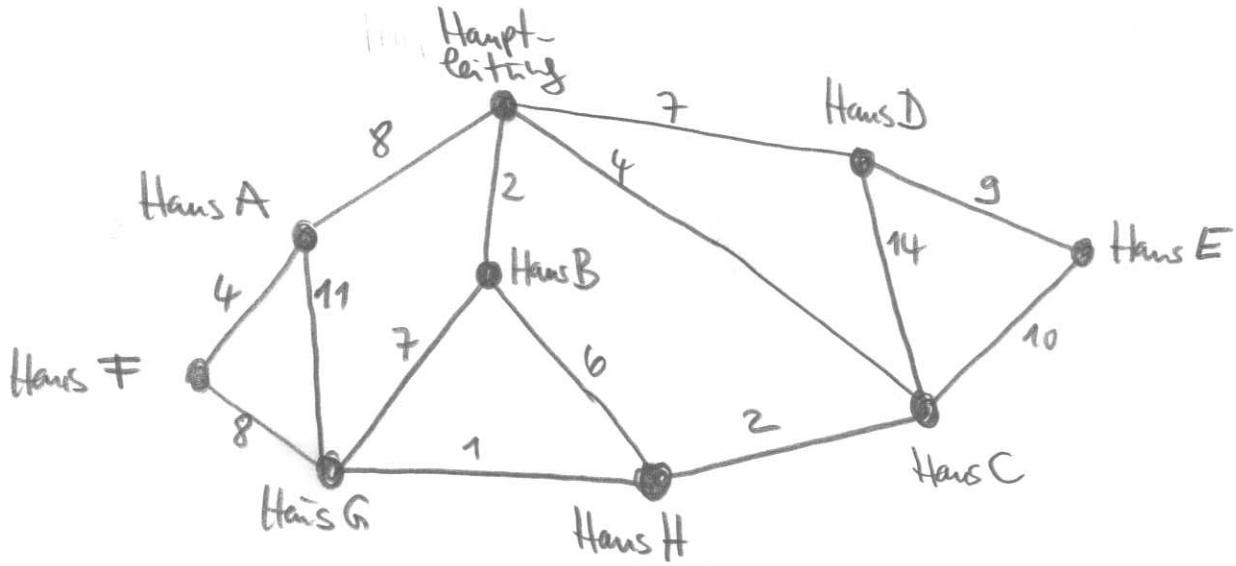
Geht man von einem zusammenhängenden Graphen zu einem seiner Spannbäume über, so verkleinert man die Kantenmenge von $|E|$ auf — gemäß dem folgenden Satz 450 — $|V|-1$ Kanten, ohne dabei den Zusammenhang des Graphen aufzugeben. Mit dem Begriff des Spannbaums wird also ein "bezüglich der Kantenanzahl kostengünstigerer Zusammenhang" modelliert.

Manche konkreten Probleme lassen sich durch Graphen modellieren, deren Kanten mit bestimmten Werten markiert sind, so dass zur Lösung des Problems ein Spannbaum gesucht wird, bei dem die Summe seiner Kantenmarkierungen so klein wie möglich ist (engl.: "minimum spanning tree problem")

Beispiel 4.49 (Kabelfernsehen)

Eine Firma will Leitungen zum Empfang von Kabelfernsehen in einem neuen Wohngebiet verlegen. Der folgende Graph skizziert das Wohngebiet.

- Knoten entsprechen dabei einzelnen Häusern bzw der Hauptleitung die aus einem bereits verkabelten Gebiet heranführt,
- eine Kante zwischen zwei Knoten zeigt an, dass es prinzipiell möglich ist, eine direkte Leitung zwischen den beiden Häusern zu verlegen, und
- der Wert, mit dem die Kante markiert ist, beschreibt, wie teuer (in 1.000 €) es ist, diese Leitung unterirdisch zu verlegen.



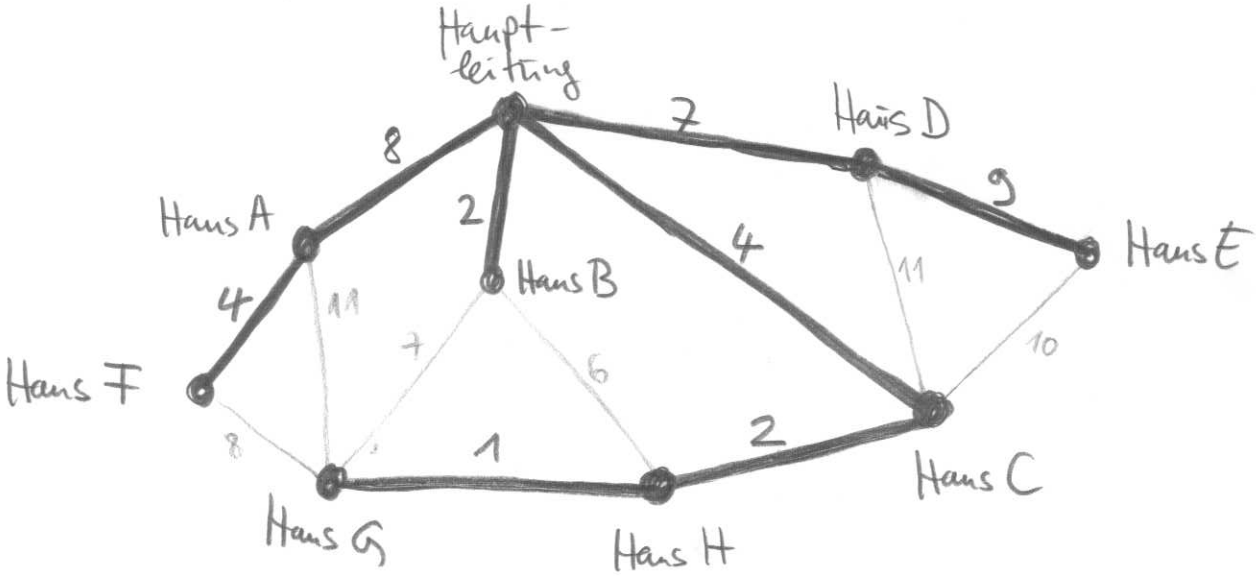
Ziel ist, Leitungen so zu verlegen, dass

1) jedes Haus ans Kabelfernsehen angeschlossen ist, und
2) die Kosten für das Verlegen der Leitungen so gering wie möglich sind.

Es wird also ein Spannbaum gesucht, bei dem die Summe seiner Kantenmarkierungen so klein wie möglich ist.

Ein solcher Spannbaum wird <u>minimaler Spannbaum</u> (engl.: minimum spanning tree) genannt.

Die im Folgenden **fett** gezeichneten Kanten geben die Kanten eines minimalen Spannbaums an



Verlegt die Firma genau diese Leitungen, so hat sie das neue Wohngebiet mit den geringstmöglichen Kosten ans Kabelfernsehen angeschlossen.

<u>Bemerkung:</u> Effiziente Verfahren zum Finden minimaler Spannbäume werden Sie in der Vorlesung "Algorithmentheorie" (GL-1) kennenlernen.

Satz 4.50 (Anzahl der Kanten eines Baums)

Sei $B = (V, E)$ ein ungerichteter Baum, dessen Knotenmenge endlich und nicht-leer ist.

Dann gilt:

$$|E| = |V| - 1.$$

Beweis: Per Induktion nach $n := |V|$.

Induktionsanfang: $n = 1$:

Der einzige ungerichtete Baum $B = (V, E)$ mit $|V| = 1$ ist der Graph $\bullet$ mit $E = \emptyset$.

Für diesen Graphen gilt:

$|E| = 0 = 1 - 1 = |V| - 1$ ✓

Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ beliebig.

Induktionsannahme:

Für jeden ungerichteten Baum $B' = (V', E')$ mit $|V'| \leq n$ gilt:

$$|E'| = |V'| - 1.$$

<u>Behauptung</u>: Für jeden ungerichteten Baum $B = (V, E)$ mit $|V| = n+1$ gilt: $|E| = |V| - 1$.

<u>Beweis</u>: Sei $B = (V, E)$ ein ungerichteter Baum mit $|V| = n+1$.

Da B zusammenhängend ist und $|V| \geq 1+1 = 2$ Knoten besitzt, muss E mindestens eine Kante enthalten.

Sei $\{x, y\}$ eine Kante in E.

Sei G der Graph, der aus B durch Löschen der Kante $\{x, y\}$ entsteht.

Da B zusammenhängend ist und keinen einfachen Kreis enthält, muss G aus genau 2 Zusammenhangskomponenten bestehen.

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ diese beiden Zusammenhangskomponenten von G.

Es gilt:
1) $V = V_1 \dot\cup V_2$, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$
2) $E = E_1 \dot\cup E_2 \dot\cup \{\{x, y\}\}$
3) G_1 ist ein ungerichteter Baum
4) G_2 ist ein ungerichteter Baum

Wegen 1) gilt insbesondere, dass $|V_1|, |V_2| \leq n$.

Wegen 3) und 4) gilt daher gemäß Induktionsannahme:

5) $|E_1| = |V_1| - 1$ und $|E_2| = |V_2| - 1$.

Aus 2) und 1) folgt daher:

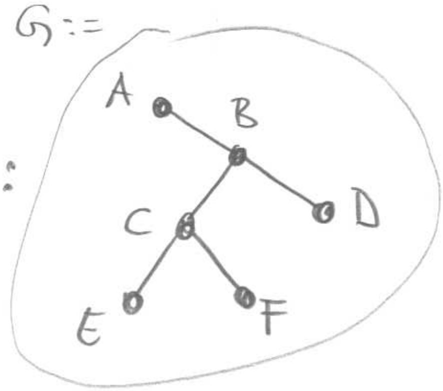
$$|E| \underset{2)}{=} |E_1| + |E_2| + 1 \underset{5)}{=} |V_1| - 1 + |V_2| \cancel{-1} \cancel{+1} \underset{1)}{=} |V| - 1 . \qquad \square$$

Gerichtete Bäume

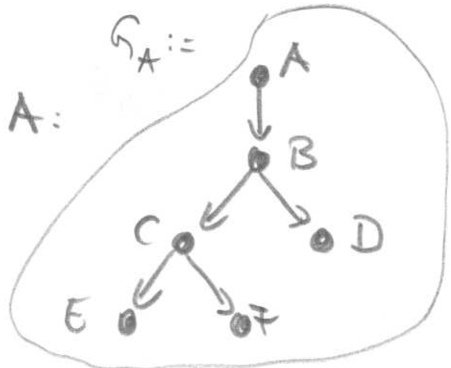
Einen <u>gerichteten Baum</u> erhält man, indem man in einem ungerichteten Baum einen Knoten als "Wurzel" auswählt und alle Kanten in die Richtung orientiert, die von der Wurzel weg führt.

<u>Beispiel 4.51:</u>

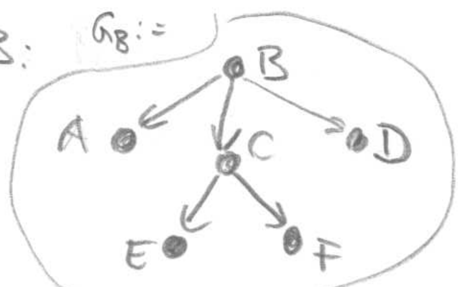
ungerichteter Baum:



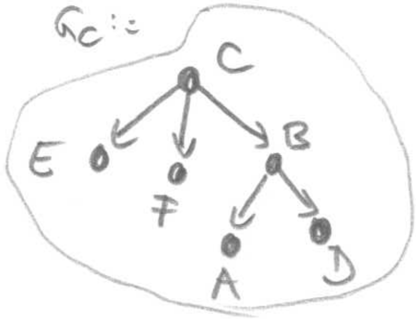
- Zugehöriger gerichteter Baum mit Wurzel A:



- Zugehöriger gerichteter Baum mit Wurzel B:



- Zugehöriger gerichteter Baum mit Wurzel C:



Definition 4.52

(a) Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt gerichteter Baum, falls er folgende Eigenschaften hat:

1) G besitzt genau einen Knoten $w \in V$ mit $\text{Ein-Grad}_G(w) = 0$. Dieser Knoten wird Wurzel genannt.

2) Für jeden Knoten $v \in V$ gilt: Es gibt in G einen Weg von der Wurzel zum Knoten v.

3) Für jeden Knoten $v \in V$ gilt: $\text{Ein-Grad}_G(v) \leq 1$.

(b) Sei $B = (V, E)$ ein gerichteter Baum.
Die Höhe (bzw. Tiefe, engl.: height, depth) von B ist die Länge eines längsten Weges in B.

Beispiel: In Beispiel 4.51 hat G_A die Höhe 3,
G_B die Höhe 2 und
G_C die Höhe 2.

(c) Sei $B = (V, E)$ ein gerichteter Baum.
Diejenigen Knoten, deren Aus-Grad 0 ist, heißen Blätter.

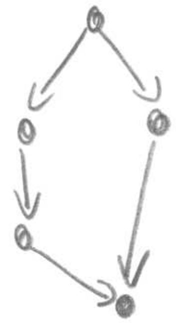
Beispiel: In Beispiel 4.51 hat G_A die Blätter D, E, F, G_B die Blätter A, D, E, F und G_C die Blätter A, D, E, F.

(d) Diejenigen Knoten eines gerichteten Baums, die weder Wurzel noch Blätter sind, heißen innere Knoten.

Beobachtung 4.53

(a) Jeder gerichtete Baum ist ein gerichteter azyklischer Graph (kurz: DAG, vgl. Definition 4.14).
Aber es gibt gerichtete azyklische Graphen, die keine gerichteten Bäume sind.

Beispiel:



ist ein DAG, aber kein gerichteter Baum.

(b) Für jeden gerichteten Baum $B = (V, E)$, dessen Knotenmenge endlich und nicht-leer ist, gilt:

$$|E| = |V| - 1.$$

Dies folgt unmittelbar aus Satz 2.50, da der ungerichtete Graph, der entsteht, indem man in B die Kantenorientierung "vergisst" (d.h. jede gerichtete Kante (i,j) durch die ungerichtete Kante $\{i,j\}$ ersetzt), ein ungerichteter Baum ist.

Alternativ zu Definition 4.52 kann man die gerichteten Bäume, deren Knotenmenge endlich und nicht-leer ist, auch folgendermaßen definieren:

<u>Definition 4.54:</u>

Die Klasse der gerichteten Bäume mit endlicher, nicht-leerer Knotenmenge ist rekursiv wie folgt definiert:

<u>Basisregel:</u> Ist V eine Menge mit $|V| = 1$, so ist $B := (V, \emptyset)$ ein gerichteter Baum.

<u>Skizze:</u> $B := \bullet$

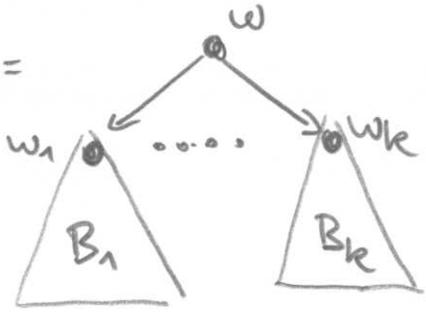
Der (eindeutig bestimmte) Knoten in V heißt <u>Wurzel</u> von B.

Die <u>Höhe</u> von B ist 0.

<u>Rekursive Regel:</u> Ist $k \in \mathbb{N}_{>0}$, sind $B_1 = (V_1, E_1), \dots, B_k = (V_k, E_k)$ gerichtete Bäume mit paarweise disjunkten Knotenmengen (d.h. $V_i \cap V_j = \emptyset$ f.a. $i,j \in \{1,\dots,k\}$ mit $i \neq j$), sind $w_1 \in V_1, \dots, w_k \in V_k$ die Wurzeln von $B_1, \dots, B_k$, und ist w ein Element, das nicht in $V_1 \cup \dots \cup V_k$ liegt, dann ist der Graph $B = (V, E)$ mit $V := \{w\} \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$ und $E := E_1 \cup \dots \cup E_k \cup \{(w, w_i) : i \in \{1,\dots,k\}\}$ ein

gerichteter Baum.

Skizze: $B :=$



Der Knoten w heißt Wurzel von B.

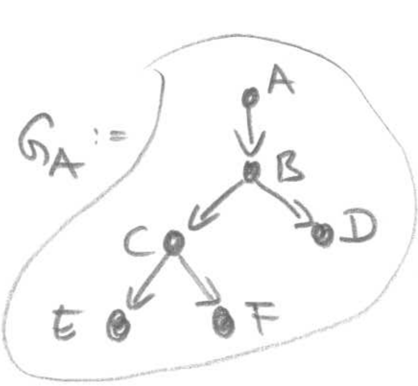
Die Höhe von B ist $1 + \max\{h_1, \ldots, h_k\}$, wobei $h_1, \ldots, h_k \in \mathbb{N}$ die Höhen der gerichteten Bäume $B_1, \ldots, B_k$ sind.

Notation 4.55:

Sei $B = (V, E)$ ein gerichteter Baum und sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten in B.

Die Knoten $v' \in V$, zu denen von v aus eine Kante führt (dh $(v, v') \in E$), heißen Kinder von v.

Beispiel: Im Graphen $G_A :=$



aus Beispiel 4.51

gilt: Knoten A hat genau ein Kind, nämlich B,
Knoten B ...... zwei Kinder, ... C und D,
.... C ...... E und F, und
die Knoten D, E, F haben keine Kinder.

Eine besondere Rolle bei der Modellierung spielen Bäume, bei denen jeder Knoten höchstens 2 Kinder hat. Mit solchen Bäumen kann man z.B. Kaskaden von JA-NEIN-Entscheidungen oder Binär-Codierungen beschreiben.

<u>Definition 4.56</u> (Binärbaum, vollständiger Binärbaum)

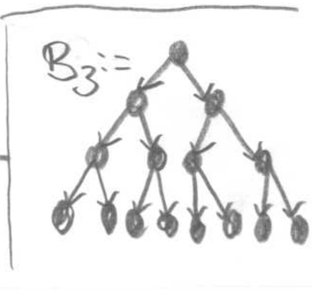
(a) Ein gerichteter Baum $B=(V,E)$ heißt <u>Binärbaum</u>, falls für jeden Knoten $v \in V$ gilt: $\text{Aus-Grad}_B(v) \leq 2$.

(b) Ein Binärbaum $B=(V,E)$ heißt <u>vollständiger Binärbaum</u>, falls gilt:

1) Jeder Knoten, der kein Blatt ist, hat Aus-Grad 2, und
2) Es gibt eine Zahl $h \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Blatt $v \in V$ gilt: Der Weg von der Wurzel zum Blatt v hat die Länge h.

<u>Beispiel 4.57</u>

Der Graph G_A aus Beispiel 4.51 ist ein Binärbaum, aber kein vollständiger Binärbaum. Der Graph G_B aus Beispiel 4.51 ist kein Binärbaum.
Der folgende Graph B_3 ist ein <u>vollständiger Binärbaum</u> der Höhe 3.



Zwischen der Höhe, der Anzahl der Blätter und der Anzahl der Knoten eines Binärbaums besteht der folgende wichtige Zusammenhang:

Satz 4.57

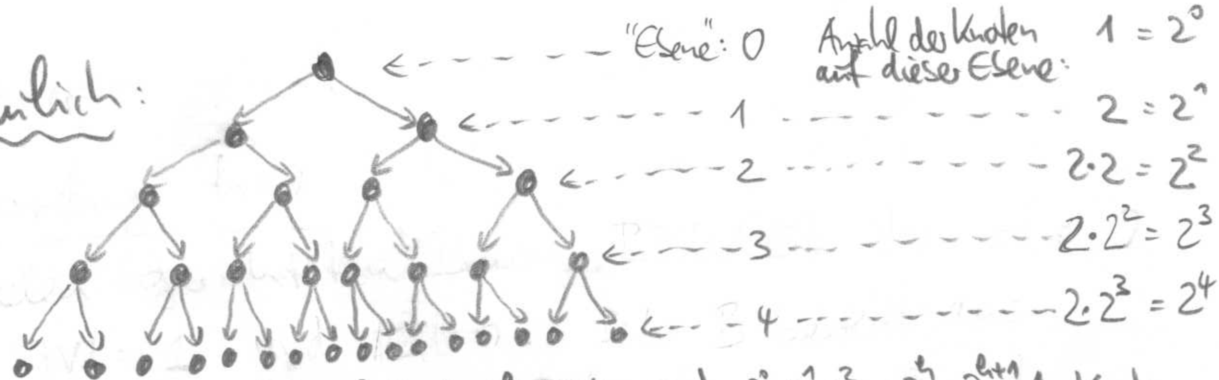
Sei $h \in \mathbb{N}$.

(a) Jeder vollständige Binärbaum der Höhe h hat genau 2^h Blätter und genau $2^{h+1}-1$ Knoten.

(b) Jeder Binärbaum der Höhe h hat höchstens 2^h Blätter und höchstens $2^{h+1}-1$ Knoten.

Beweis:

(a) Anschaulich:



⇝ vollst. Bin.baum der Höhe h hat 2^h Blätter und $2^0+2^1+2^2+\dots+2^h \underset{\uparrow}{=} 2^{h+1}-1$ Knoten.

Satz 2.41

Formaler Beweis: Per Induktion nach h:

Induktionsanfang: $h=0$:

Für jeden gerichteten Baum $B=(V,E)$ der Höhe 0 gilt: $|V|=1$ und $|E|=0$. D.h. B besteht aus genau einem Knoten, der gleichzeitig Wurzel und (einziges) Blatt des Baums ist.

D.h: B hat genau $1 = 2^0 = 2^h$ Blätter und genau $1 = 2-1 = 2^1-1 = 2^{h+1}-1$ Knoten.

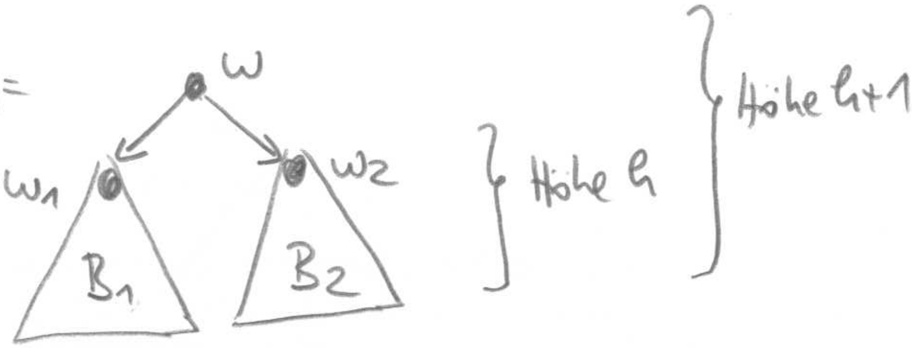
Induktionsschritt: $h \to h+1$: Sei $h \in \mathbb{N}$ beliebig.

Induktionsannahme: Jeder vollständige Binärbaum der Höhe h hat genau 2^h Blätter und genau $2^{h+1}-1$ Knoten.

Behauptung: Jeder vollständige Binärbaum der Höhe $h+1$ hat genau 2^{h+1} Blätter und genau $2^{h+2}-1$ Knoten.

Beweis: Sei $B=(V,E)$ ein vollständiger Binärbaum der Höhe $h+1$, und sei $w \in V$ die Wurzel von B.
Wegen $h+1 \geq 1$ hat w genau 2 Kinder; seien $w_1 \in V$ und $w_2 \in V$ diese beiden Kinder von w. Für $i \in \{1,2\}$ sei V_i die Menge aller Knoten aus V, zu denen von w_i aus ein Weg führt; und sei $B_i := (V_i, E_i)$ der induzierte Teilgraph von B mit Knotenmenge V_i.

Skizze: $B=$



Offensichtlich ist sowohl B_1 als auch B_2 ein vollständiger Binärbaum der Höhe h.
Gemäß Induktionsannahme hat jeder der beiden Bäume B_1 und B_2 genau 2^h Blätter und genau $2^{h+1}-1$ Knoten.

Der Baum B hat daher genau $2^h+2^h = 2^{h+1}$ Blätter und genau $1+(2^{h+1}-1)+(2^{h+1}-1) = 2\cdot 2^{h+1}-1 = 2^{h+2}-1$ Knoten.

□

(b): Analog.
Details: Übung.

□

Modellierungsbeispiele

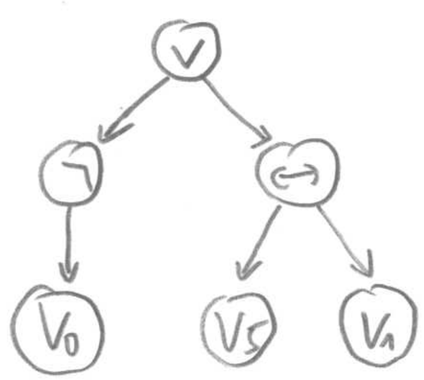
Gerichtete Bäume mit zusätzlichen Knoten- und/oder Kantenmarkierungen können auf vielfältige Arten zur Modellierung genutzt werden:

Beispiel 4.58

In Kapitel 3 (Seite 97) haben wir Bäume bereits genutzt, um die Struktur einer aussagenlogischen Formel übersichtlich darzustellen (der entsprechende Baum heißt Syntaxbaum der Formel).

Beispiel: Syntaxbaum der Formel

$$(\neg V_0 \vee (V_5 \leftrightarrow V_1))$$



Auf ähnliche Art werden markierte Bäume genützt, um die Struktur vieler anderer Objekte (an Stelle von aussagenlogischen Formeln) zu beschreiben

— z.B. für arithmetische Terme,

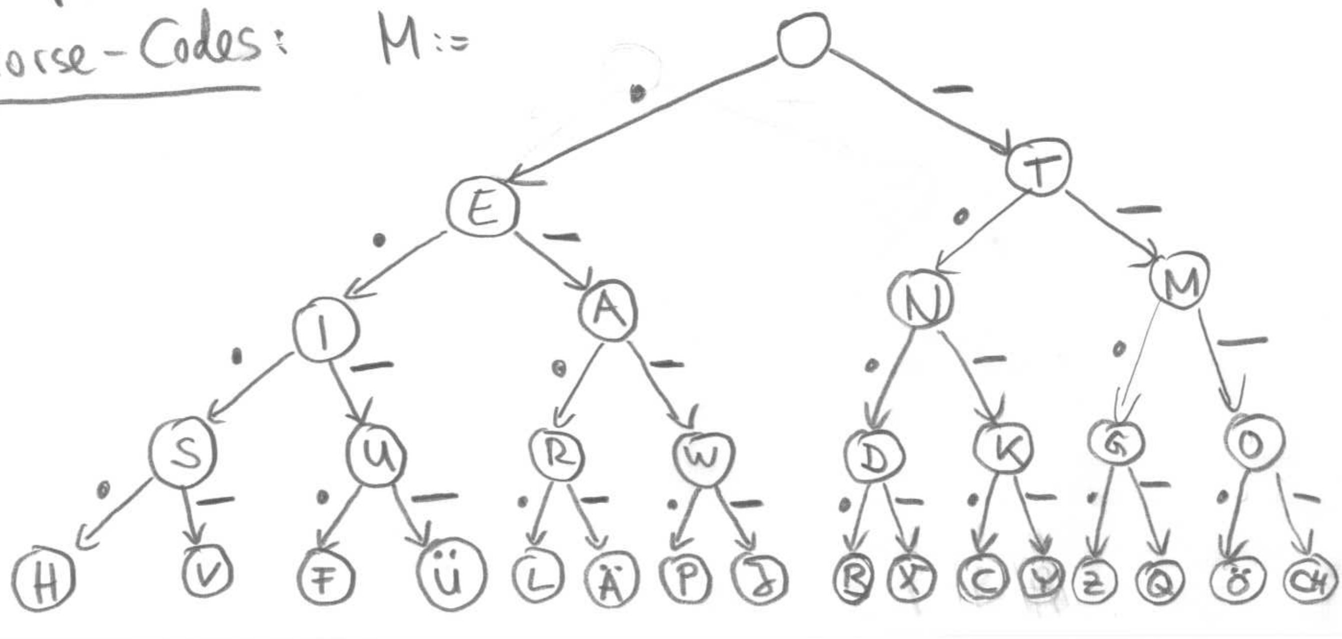
für Darstellung von Klassen- und Objekthierarchien, oder

für Beschreibung der Struktur von Computerprogrammen oder umgangssprachlichen Texten (↗Linguistik).

Beispiel 4.59

Folgen von Entscheidungen können in vielen Zusammenhängen durch gerichtete markierte Bäume modelliert werden — so genannte Entscheidungsbäume.

Durch einen solchen Entscheidungsbaum erhält man beispielsweise eine kompakte Darstellung des Morse-Codes: M :=



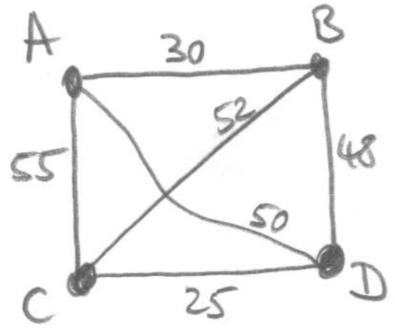
Im Morse-Code wird jeder Buchstabe durch eine Folge von kurzen und langen Signalen (• ≙ kurz, — ≙ lang) repräsentiert.
Eine eingehende Meldung aus kurzen und langen Signalen wird entschlüsselt, indem man an der Wurzel des Baums M beginnt und bei einem kurzen Signal nach links, bei einem langen nach rechts weitergeht. Eine längere Pause zeigt an, dass ein Buchstabe vollständig übermittelt ist.

In jedem Entscheidungsbaum modellieren die Knoten einen Zwischenstand bei der Entscheidungsfindung. Sie können entsprechend markiert sein, z.B. mit dem codierten Buchstaben des Morse-Codes. Die Kanten, die von einem Knoten ausgehen, modellieren die Alternativen, aus denen in dem durch den Knoten repräsentierten "Zustand" eine ausgewählt werden kann — im Morse-Code ist das jeweils ein kurzes oder ein langes Signal, das als Kantenmarkierung angegeben wird.

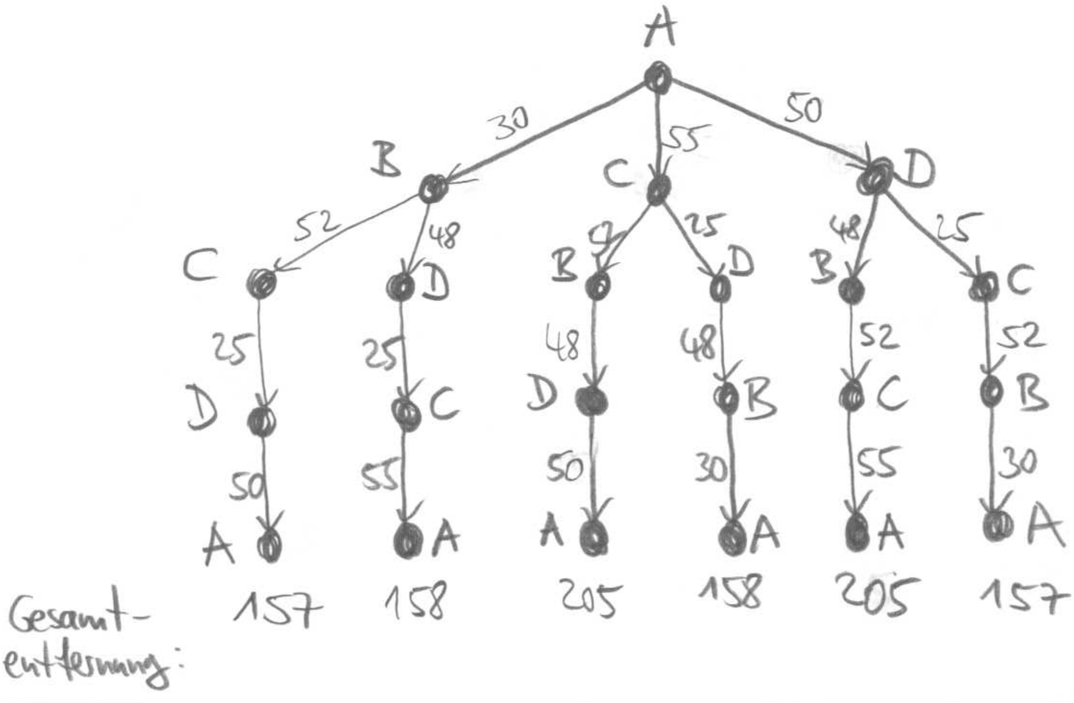
Beispiel 4.60:

Markierte Bäume können auch genutzt werden, um den Lösungsraum kombinatorischer Probleme darzustellen.

Beispiel: Ein Handlungsreisender soll einen möglichst kurzen Rundweg finden, auf dem er jede der Städte A, B, C, D besucht. Die Entfernungen (in km) zwischen den Städten sind als Kantenmarkierungen des folgenden Graphen gegeben:



Alle möglichen in Stadt A startenden Rundwege werden durch den folgenden Baum dargestellt:



Jeder Weg von der Wurzel zu einem Blatt
repräsentiert dabei einen Rundweg, auf dem
jede der Städte genau einmal besucht wird.
Die Kantenmarkierungen geben die Entfernungen zwischen
einzelnen Städten wieder. Eine zusätzliche
Knotenmarkierung an jedem Blatt gibt die Gesamtlänge
des entsprechenden Rundwegs an.
Die beiden kürzesten Rundwege für unseren Handlungs-
reisenden sind also

$$(A, B, C, D, A) \quad \text{und} \quad (A, D, C, B, A).$$

<u>Bemerkung 4.61</u>:
Nach dem gleichen Schema kann man auch
Zugfolgen in Spielen modellieren: Jeder Knoten des
Entscheidungsbaums modelliert einen Spielzustand.
Die von dort ausgehenden Kanten geben an, welche
Möglichkeiten für den nächsten Zug bestehen.
Solche Darstellungen werden z.B. in Schachprogrammen
verwendet, um die Folgen der anstehenden Entscheidung
zu analysieren und zu bewerten.

<u>Beachte</u>: Bei der Modellierung von Spielabläufen
können manche "Spielzustände" (z.B. Konfigurationen
eines Schachbretts) auf unterschiedlichen Wegen (d.h.

Spielverläufen) erreicht werden, und trotzdem "im Sinne des Spiels" denselben Zustand beschreiben. In solchen Fällen könnte man im Entscheidungsbaum die zugehörigen Knoten zu einem einzigen Knoten zusammenfassen. Damit geht dann allerdings die Baum-Eigenschaft verloren, und es entsteht ein allgemeiner gerichteter Graph, der auch Kreise enthalten kann. Ein Kreis entspricht dann der Situation, dass eine Folge von Spielzügen in einen Zustand des Spiels zurückführt, der früher schon einmal durchlaufen wurde.

4.3 Einige spezielle Arten von Graphen

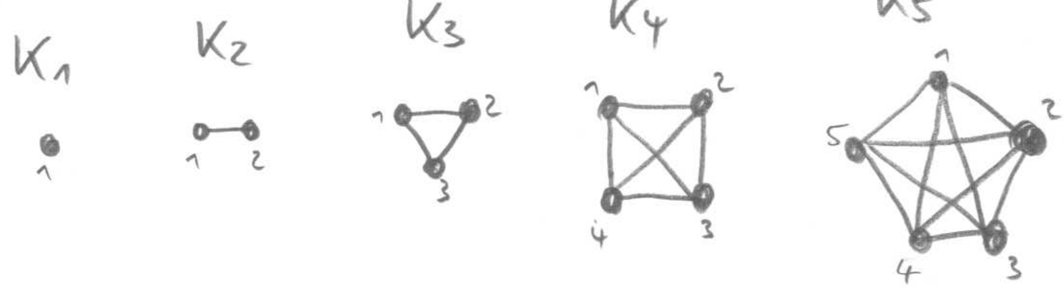
In diesem Abschnitt werden einige spezielle Arten von Graphen vorgestellt, die Ihnen im Laufe der nächsten Semester immer wieder begegnen werden.

Spezielle ungerichtete Graphen

Definition 4.62 (Der vollständige Graph K_n)

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
Der vollständige ungerichtete Graph K_n hat Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ und Kantenmenge $\{ \{i,j\} : i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \}$

Beispiele:



Beobachtung: Der vollständige Graph K_n hat n Knoten und $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten.

Definition 4.63 (Der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$)

Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Der vollständige ungerichtete bipartite Graph $K_{m,n}$ hat Knotenmenge $\{(1,i) : i \in \{1,\dots,n\}\} \,\dot\cup\, \{(2,j) : j \in \{1,\dots,m\}\}$ und Kantenmenge $\{\{(1,i),(2,j)\} : i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,m\}\}$.

Beispiele:

$K_{1,1}$

$K_{1,2}$

$K_{1,3}$

$K_{1,4}$

$K_{2,1}$

$K_{2,2}$

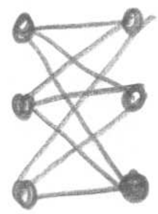
$K_{2,3}$

$K_{2,4}$

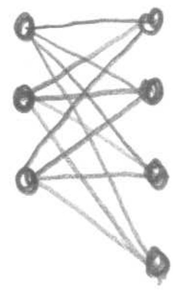
$K_{3,1}$

$K_{3,2}$

$K_{3,3}$



$K_{3,4}$



Beobachtung: Der Graph $K_{m,n}$ hat $m+n$ Knoten und $m \cdot n$ Kanten

Notation 4.64

Ein ungerichteter Graph G mit endlicher, nicht-leerer Knotenmenge heißt

(a) vollständig, falls es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, so dass $G \cong K_n$ (d.h. G ist isomorph zu K_n)

(b) vollständig bipartit, falls es Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, so dass $G \cong K_{m,n}$.

Spezielle gerichtete Graphen

Gemäß Definition 4.6 ("gerichteter Graph") und Definition 2.20 (c) ("k-stellige Relation") kann jeder gerichtete Graph $G = (V, E)$ als eine 2-stellige Relation über V aufgefasst werden, da die Kantenmenge E von G ja gerade eine Teilmenge von $V^2 = V \times V$ ist.
Umgekehrt können wir natürlich auch jede 2-stellige Relation R über einer Menge M als gerichteten Graph auffassen, dessen Knotenmenge M und dessen Kantenmenge R ist.

Gerichtete Graphen sind also dasselbe wie 2-stellige Relationen über einer Menge V.

Von besonderem Interesse sind 2-stellige Relationen, die eine oder mehrere der folgenden Eigenschaften besitzen:

<u>Definition 4.65</u>:

Sei E eine 2-stellige Relation über einer Menge V (d.h. $E \subseteq V \times V$, d.h. $G = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph)

<u>(a)</u> E heißt <u>reflexiv</u>, falls für alle $v \in V$ gilt:

$(v, v) \in E$ (Skizze: )

<u>(b)</u> E heißt <u>symmetrisch</u>, falls f.a. $v, w \in V$ gilt:

Wenn $(v, w) \in E$, dann auch $(w, v) \in E$

(d.h. zu jeder Kante $\underset{v}{\bullet} \longrightarrow \underset{w}{\bullet}$ gibt es auch eine "Rückwärtskante $\underset{v}{\bullet} \longleftarrow \underset{w}{\bullet}$)

<u>(c)</u> E heißt <u>antisymmetrisch</u>, falls f.a. $v, w \in V$ gilt:

Wenn $(v, w) \in E$ und $(w, v) \in E$, dann $v = w$.

(d.h.: Ist $v \neq w$, so gibt es in E allenfalls eine der beiden Kanten $\underset{v}{\bullet} \longrightarrow \underset{w}{\bullet}$ und $\underset{v}{\bullet} \longleftarrow \underset{w}{\bullet}$)

(d) E heißt <u>konnex</u>, falls f.a. $v, w \in V$ gilt:

$$(v,w) \in E \quad \text{oder} \quad (w,v) \in E$$

(d.h. mindestens eine der beiden Kanten $\underset{v}{\bullet} \longrightarrow \underset{w}{\bullet}$ und $\underset{v}{\bullet} \longleftarrow \underset{w}{\bullet}$ liegt in E)

(e) E heißt <u>transitiv</u>, falls f.a. $v, w, u \in V$ gilt:

Ist $(v,w) \in E$ und $(w,u) \in E$, so auch $(v,u) \in E$

(Skizze:
$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "\in E"'] & w \arrow[r, "\in E"'] & u \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} v \arrow[r, "\in E"'] \arrow[rr, bend left, "\in E"] & w \arrow[r, "\in E"'] & u \end{tikzcd}$$
)

Äquivalenzrelationen:

Definition 4.66:

Eine <u>Äquivalenzrelation</u> ist eine 2-stellige Relation, die <u>reflexiv</u>, <u>symmetrisch</u> und <u>transitiv</u> ist.

Beispiel 4.67:

Beispiele für Äquivalenzrelationen:

(a) <u>Gleichheit</u>: Für jede Menge M ist

$$E := \{ (m,m) : m \in M \}$$ eine Äquivalenzrelation.

Die Aussage "$(x,y) \in E$" entspricht gerade der Aussage "$x = y$".

(b) Gleichmächtigkeit:

Für jede endliche Menge M ist

$$E := \{ (A,B) : A \subseteq M,\ B \subseteq M,\ |A| = |B| \}$$

eine Äquivalenzrelation über der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

(c) Logische Äquivalenz:

$$E := \{ (\varphi, \psi) : \varphi \in AL,\ \psi \in AL,\ \varphi \equiv \psi \}$$

ist eine Äquivalenzrelation über der Menge AL aller aussagenlogischen Formeln.

Ordnungsrelationen

Definition 4.68 (Ordnungen)

Sei E eine 2-stellige Relation über einer Menge V.

(a) E heißt Präordnung, falls E reflexiv und transitiv ist

(b) E heißt partielle Ordnung, falls E reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

(c) E heißt lineare Ordnung (oder totale Ordnung), falls E reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und konnex ist.

Beispiel 4.69

(a) $\leq$ ist eine lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ (und $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$).

Ebenso ist $\geq$ eine lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ (und $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$).

(b) Für jede Menge M sind $\subseteq$ und $\supseteq$ partielle Ordnungen auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

(c) Die "Folgerungsrelation"

$$E := \{ (\varphi, \psi) : \varphi \in AL, \psi \in AL, \varphi \models \psi \}$$

ist eine Präordnung auf AL.

(d) Für jede endliche Menge M ist

$$E := \{ (A, B) : A \subseteq M, B \subseteq M, |A| \leq |B| \}$$

eine Präordnung auf $\mathcal{P}(M)$.

Die reflexive transitive Hülle einer Relation

Definition 4.70

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.
Die *reflexive transitive Hülle* (bzw. der *reflexive transitive Abschluss*) von E auf V ist die rekursiv wie folgt definierte Relation $E^* \subseteq V \times V$:

Basisregeln:

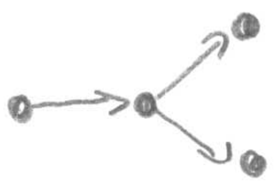
- F.a. $v \in V$ ist $(v, v) \in E^*$.
- F.a. $(v, w) \in E$ ist $(v, w) \in E^*$.

Rekursive Regel:

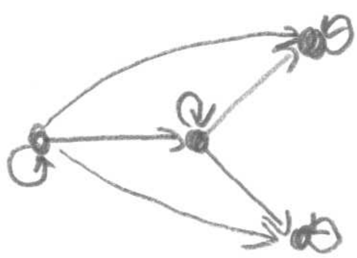
- Sind $(v, w) \in E^*$ und $(w, u) \in E^*$, so ist auch $(v, u) \in E^*$.

Beispiel

$G = (V, E) :=$



$G^* = (V, E^*)$:



Beobachtung 4.71:

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und seien $v, w \in V$.
Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Es gibt in G einen Weg von v nach w

(b) $(v, w) \in E^*$, wobei E^* die reflexive transitive Hülle von E auf V ist.

Beweis: Übung.