Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

16. Januar 2008

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 11 (Beispielklausur)

Abgabe: *bis 23. Januar 2008, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Achtung: *Dieses Übungsblatt stellt lediglich ein* Beispiel *für eine mögliche Klausur dar (insbesondere bezüglich Umfang und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben). Die Klausur am 23.02.08 kann auch eine andere Gewichtung der in der Vorlesung behandelten Themen beinhalten, insbesondere auch Themen aus den Vorlesungen vom 16.1.08 bis 6.2.08.*

Aufgabe 1: **(14 Punkte)**

Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt: $2^n \geq n^2$.

Aufgabe 2: **($5 + 12 = 17$ Punkte)**

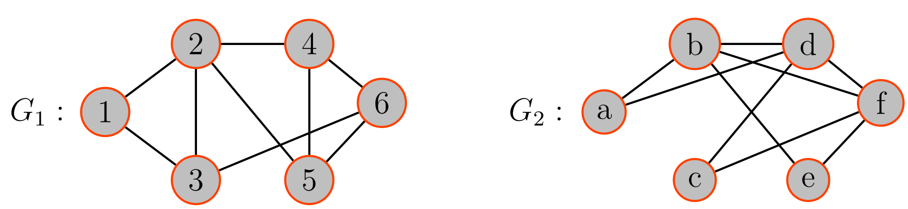
(a) Was bedeutet es, dass eine aussagenlogische Formel ψ aus einer aussagenlogischen Formel φ folgt? Geben Sie eine exakte Definition an.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Weisen Sie jeweils nach, dass Ihre Antwort korrekt ist.

- **(i)** $\big(V_0 \rightarrow (V_1 \vee V_2)\big)$ ist äquivalent zu $\big((\neg V_1 \wedge \neg V_2) \rightarrow \neg V_0\big)$
- **(ii)** $\Big(\big(V_0 \rightarrow (V_0 \rightarrow V_1)\big) \wedge V_1\Big)$ ist äquivalent zu $\Big(V_3 \ \wedge \ \Big(V_1 \ \leftrightarrow \ \big(V_3 \vee (V_1 \wedge V_2)\big) \Big) \Big)$

Aufgabe 3: **($6 + 5 + 6 + 4 = 21$ Punkte)**

Es seien die folgenden ungerichteten Graphen G_1 und G_2 gegeben:



(a) Geben Sie die Adjazenzmatrix und Adjazenzliste von G_1 an.

(b) In der Vorlesung haben Sie einen Satz kennengelernt, der die Existenz eines Euler-Kreises in einem ungerichteten zusammenhängenden Graphen mit den Graden von Knoten des Graphen in Zusammenhang bringt. Geben Sie die genaue Aussage dieses Satzes an.

(c) Überprüfen Sie für jedes $i \in \{1, 2\}$, ob es in G_i einen Euler-Kreis gibt oder nicht. Geben Sie jeweils einen Euler-Kreis an oder beweisen Sie, dass G_i keinen Euler-Kreis besitzt.

(d) Sind G_1 und G_2 isomorph? Geben Sie einen Isomorphismus von G_1 nach G_2 an oder begründen Sie, warum es keinen solchen Isomorphismus gibt.

Aufgabe 4: **($6 + 4 + 3 + 4 = 17$ Punkte)**

Im kommenden Semester sollen die folgenden Vorlesungen gehalten werden. Jede davon findet einmal wöchentlich an drei aufeinanderfolgenden Stunden statt.

Lehrveranstaltung	Dozent(en)
Datenbanksysteme 1 (DB1)	Zicari
Datenbanksysteme 2 (DB2)	Zicari
Logik und Datenbanken (LD)	Schweikardt
Methoden der künstlichen Intelligenz (KI)	Timm, Schmidt-Schauß
Formale Sprachen und Berechenbarkeit (GL-2)	Wotschke
Logik in der Informatik (LI)	Schweikardt
Aktuelle Themen zu Algorithmen und Komplexität (ATAK)	Schnitger

Dabei muss aber Folgendes beachtet werden: DB1 soll nicht gleichzeitig mit einer der Vorlesungen LD, KI und GL-2 stattfinden. Weiterhin darf KI nicht gleichzeitig mit LD oder LI gehalten werden, und es soll möglich sein, dass ein Student/eine Studentin die Veranstaltungen LI und ATAK besuchen kann. Schließlich darf GL-2 nicht gleichzeitig mit KI, LI bzw. ATAK stattfinden. Zu beachten ist auch, dass zwei Lehrveranstaltungen, die von demselben Dozenten gehalten werden, nicht am gleichen Termin stattfinden können.

(a) Stellen Sie den Konfliktgraphen auf.

(b) Sei $G = (V, E)$ der Konfliktgraph aus (a). Geben Sie eine konfliktfreie Knotenmarkierung $m\colon V \to \mathbb{N}$ an, so dass für jeden Knoten $v \in V$ gilt: $m(v) \in \{1, 2, 3\}$.

(c) Geben Sie einen konkreten Terminplan für die oben angegebenen Lehrveranstaltungen an, der mit drei Terminen auskommt.

(d) Wie viele Termine werden mindestens benötigt, um die Lehrveranstaltungen konfliktfrei auf verschiedene Termine aufzuteilen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5: **($9 + 5 + 7 = 21$ Punkte)**

(a) Sei $\sigma = \{\dot{B}, \dot{S}, \dot{F}, \dot{Nachfolger}, \dot{letzter}\}$ eine Signatur, wobei $\dot{B}, \dot{S}, \dot{F}$ einstellige Relationssymbole, $\dot{Nachfolger}$ ein einstelliges Funktionssymbol und $\dot{letzter}$ ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur mit Universum $A = \{1, 2, \ldots, 34\}$ und $\dot{letzter}^{\mathfrak{A}} = 34$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

- $a \in \dot{B}^{\mathfrak{A}} \iff$ FC Bayern München ist Tabellenführer an Spieltag a
- $a \in \dot{S}^{\mathfrak{A}} \iff$ FC Schalke 04 ist Tabellenführer an Spieltag a
- $a \in \dot{F}^{\mathfrak{A}} \iff$ Eintracht Frankfurt ist Tabellenführer an Spieltag a
- $\dot{Nachfolger}^{\mathfrak{A}}(a) = \begin{cases} a + 1, & \text{falls } a \in \{1, 2, \ldots, 33\} \\ a, & \text{falls } a = 34. \end{cases}$

(i) Geben Sie Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ an, die in $\mathfrak{A}$ folgendes aussagen:

- FC Bayern München ist an mindestens zwei Spieltagen Tabellenführer, wird aber nicht Meister.

- An keinem Spieltag kann mehr als eine der Mannschaften FC Bayern München, FC Schalke 04 bzw. Eintracht Frankfurt Tabellenführer sein.

(ii) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was die folgende Formel in $\mathfrak{A}$ aussagt:

$$\Big(\; \forall x \big(\dot{F}(x) \lor \dot{Nachfolger}(x) \dot{=} x \big) \;\; \to \;\; \dot{S}(\dot{letzter}) \; \Big)$$

(b) Seien φ und ψ zwei Formeln der Logik erster Stufe über einer Signatur σ. Was bedeutet es, dass φ und ψ äquivalent sind? Geben Sie eine exakte Definition an.

(c) Sei σ die Signatur, die aus einem einstelligen Relationssymbol $\dot{P}$ besteht. Beweisen Sie, dass die Formel $\big(\; \exists x \dot{P}(x) \;\; \to \;\; \dot{P}(y) \; \big)$ äquivalent ist zur Formel $\forall x \big(\dot{P}(x) \to \dot{P}(y) \big)$.

Aufgabe 6: **(10 Punkte)**

Es sei $\sigma = \{\dot{<}\}$ eine Signatur, wobei $\dot{<}$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Betrachten Sie die folgenden σ-Strukturen:

- $\mathfrak{A} = (A, \dot{<}^{\mathfrak{A}})$, wobei $A = \mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und $\dot{<}^{\mathfrak{A}}$ die übliche „kleiner als"-Relation $<$ auf $\mathbb{R}$ ist
- $\mathfrak{B} = (B, \dot{<}^{\mathfrak{B}})$, wobei $B = \mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen und $\dot{<}^{\mathfrak{B}}$ die übliche „kleiner als"-Relation $<$ auf $\mathbb{Z}$ ist.

Geben Sie einen Satz φ der Logik erster Stufe über der Signatur σ an, so dass $\mathfrak{A}$ den Satz φ erfüllt und $\mathfrak{B}$ den Satz φ *nicht* erfüllt.

Hinweis: Es genügt, den Satz anzugeben und umgangssprachlich zu beschreiben, was er aussagt und warum er von $\mathfrak{A}$ erfüllt wird, von $\mathfrak{B}$ aber nicht.