Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

9. Januar 2008

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 16. Januar 2008, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

☺ **Aufgabe 1: freie und gebundene Variablen** **($4 \times 4 = 16$ Punkte)**

Bestimmen Sie für jede der folgenden $\{\dot{P}, \dot{E}, \dot{R}, \dot{f}, \dot{g}, \dot{c}\}$-Formeln, welche Variablen gebunden und welche Variablen frei in der Formel vorkommen:

(a) $\Big(\dot{P}(x) \ \lor \ \neg\big(\dot{E}(y,z) \to \dot{f}(x) \doteq \dot{f}(y)\big) \Big)$

(b) $\forall x \Big(\dot{f}(x) \doteq \dot{g}(y,x) \ \lor \ \exists z\, \dot{E}\big(x, \dot{g}(x,z)\big) \Big)$

(c) $\Big(\forall y\, \neg \dot{E}(y,x) \ \land \ \exists z \big(\dot{E}(x,z) \land \dot{E}(z,y)\big) \Big)$

(d) $\exists x \forall y \exists z \Big(\dot{f}(y) \doteq \dot{g}(x,z) \ \lor \ \neg \dot{R}\big(\dot{c}, z, \dot{f}(y)\big) \Big)$

Aufgabe 2: Terme und Formeln auswerten **($12 + 14 = 26$ Punkte)**

Sei $\sigma = \{\dot{f}, \dot{R}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$, einem 3-stelligen Relationsymbol $\dot{R}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$. Betrachten Sie die σ-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{R}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$, wobei $A = \{0,1,2,3,4\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{A}} = \{(0,3,4),\ (1,3,0),\ (4,2,3)\}$, $\dot{c}^{\mathfrak{A}} = 3$ und die Funktion $\dot{f}^{\mathfrak{A}} \colon A \times A \to A$ definiert ist durch

$\dot{f}^{\mathfrak{A}}$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Zum Beispiel gilt $\dot{f}^{\mathfrak{A}}(2,3) = 0$ und $\dot{f}^{\mathfrak{A}}(1,3) = 4$.

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ die Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \text{Var} \to A$, für die gilt: $\beta(v_0) = 2$, $\beta(v_1) = 0$, $\beta(v_2) = 1$, $\beta(v_3) = 4$, und $\beta(v_i) = 3$ für alle $i \geq 4$.

☺ **(a)** Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$ und $[\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}$ für

- $t_1 \ := \ \dot{f}(\dot{f}(v_1, v_5), \dot{c})$
- $t_2 \ := \ \dot{f}\big(\dot{f}(\dot{c}, \dot{f}(v_2, \dot{c})), v_1\big)$

(b) Berechnen Sie $[\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{I}}$ und $[\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{I}}$ für

- $\varphi_1 \ := \ \big(\dot{R}(v_1, v_2, \dot{f}(v_0, v_2)) \lor \exists v_0 \dot{R}(v_0, v_2, v_3) \big)$
- $\varphi_2 \ := \ \forall v_1 \Big(\dot{f}(v_1, \dot{c}) \doteq \dot{f}(v_2, \dot{c}) \ \to \ \exists v_3 \big(\dot{R}(v_1, v_2, v_3) \lor \dot{f}(v_1, v_5) \doteq v_4\big) \Big)$

Aufgabe 3: Äquivalenz, Folgung (12 + 18 = 30 Punkte)

☺ **(a)** Welche der folgenden Aussagen stimmen, welche stimmen nicht? (Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.)

- **(i)** $\forall x\, \varphi \;\equiv\; \neg\exists x\, \neg\varphi$
- **(ii)** $\exists x(\varphi \wedge \psi) \;\models\; \big(\exists x\, \varphi \;\wedge\; \exists x\, \psi\big)$
- **(iii)** $\big(\exists x\, \varphi \;\wedge\; \exists x\, \psi\big) \;\models\; \exists x(\varphi \wedge \psi)$
- **(iv)** $\exists x(\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \big(\exists x\, \varphi \;\wedge\; \exists x\, \psi\big)$
- **(v)** $\forall x(\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \big(\forall x\, \varphi \;\wedge\; \forall x\, \psi\big)$
- **(vi)** $\forall x\, \varphi \;\models\; \exists x\, \varphi$

(b) Beweisen Sie, dass Ihre Antworten zu (ii), (iii) und (vi) aus (a) korrekt sind.

Aufgabe 4: Datenbankanfragen (16 + 12 = 28 Punkte)

Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathfrak{A}_{\text{Kino}}$ aus der Vorlesung.

☺ **(a)** Berechnen Sie für jede der folgenden Formeln φ_i die Relation $\varphi_i(\mathfrak{A}_{\text{Kino}})$ und geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfrage durch die Formel φ_i beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_{\text{K}}) \;&=\; \exists x_{\text{Z}}\, \mathit{Programm}(x_{\text{K}}, \text{‘Capote’}, x_{\text{Z}}) \\
\varphi_2(x_{\text{S}}) \;&=\; \exists x_{\text{T}}\big(\, \exists x_{\text{R}}\, \mathit{Filme}(x_{\text{T}}, x_{\text{R}}, x_{\text{S}}) \;\wedge\; \exists x_{\text{K}} \exists x_{\text{Z}}\, \mathit{Programm}(x_{\text{K}}, x_{\text{T}}, x_{\text{Z}})\,\big) \\
\varphi_3(x_{\text{T}}) \;&=\; \exists x_{\text{K}} \exists x_{\text{Z}}\Big(\, \mathit{Programm}(x_{\text{K}}, x_{\text{T}}, x_{\text{Z}}) \;\wedge \\
&\qquad\qquad \forall y_{\text{K}} \forall y_{\text{Z}}\big(\mathit{Programm}(y_{\text{K}}, x_{\text{T}}, y_{\text{Z}}) \rightarrow y_{\text{Z}} \doteq x_{\text{Z}}\big)\,\Big) \\
\varphi_4(x_{\text{T}}, x_{\text{K}}, x_{\text{A}}) \;&=\; \Big(\, \exists x_{\text{Z}}\, \exists x_{\text{Tel}}\big(\mathit{Programm}(x_{\text{K}}, x_{\text{T}}, x_{\text{Z}}) \wedge \mathit{Orte}(x_{\text{K}}, x_{\text{A}}, x_{\text{Tel}})\big) \;\wedge \\
&\qquad\qquad \exists x_{\text{S}}\, \mathit{Filme}(x_{\text{T}}, \text{‘George Clooney’}, x_{\text{S}})\,\Big)
\end{aligned}$$

(b) Finden Sie Formeln der Logik erster Stufe, die die folgenden Anfragen beschreiben:

☺
- **(i)** Gib die Titel aller Filme aus, die in mindestens zwei Kinos laufen.
- **(ii)** Gib die Titel aller Filme aus, in denen George Clooney mitspielt, aber nicht selbst Regie führt.

  Beachten Sie: Es kann sein, dass ein Film mehr als einen Regisseur hat, z.B. Raumpatrouille Orion - Rücksturz ins Kino.
- **(iii)** Gib die Titel aller Filme aus, deren Schauspieler schon mal in einem Film von Stephen Spielberg mitgespielt haben.