Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

19. Dezember 2007

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 9

Abgabe: *bis 9. Januar 2008, 8.[15] Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(16 + 12 = 28 Punkte)**

Sei $\sigma = \{\dot{B}, \dot{S}, \dot{F}, \dot{\mathit{Nachfolger}}, \dot{\mathit{letzter}}\}$ eine Signatur, wobei $\dot{B}, \dot{S}, \dot{F}$ 1-stellige Relationsymbole, $\dot{\mathit{Nachfolger}}$ ein 1-stelliges Funktionssymbol und $\dot{\mathit{letzter}}$ ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit $A = \{1, 2, \ldots, 34\}$ und $\dot{\mathit{letzter}}^{\mathcal{A}} = 34$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

- $a \in \dot{B}^{\mathcal{A}} \iff$ FC Bayern München ist Tabellenführer an Spieltag a
- $a \in \dot{S}^{\mathcal{A}} \iff$ FC Schalke 04 ist Tabellenführer an Spieltag a
- $a \in \dot{F}^{\mathcal{A}} \iff$ Eintracht Frankfurt ist Tabellenführer an Spieltag a
- $\dot{\mathit{Nachfolger}}^{\mathcal{A}}(a) = \begin{cases} a+1, & \text{falls } a \in \{1, 2, \ldots, 33\} \\ a, & \text{falls } a = 34. \end{cases}$

(a) Geben Sie FO[σ]-Formeln an, die in $\mathcal{A}$ folgendes aussagen:

☺ **(i)** Eintracht Frankfurt ist mindestens einmal Tabellenführer.

☺ **(ii)** Jede der drei Mannschaften ist mindestens einmal Tabellenführer.

☺ **(iii)** Sind die Bayern an einem Spieltag Erster, so werden sie auch Meister.

(iv) Schalke holt nicht den Titel, wenn sie bereits am vorletzten Spieltag Tabellenführer sind.

(b) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden FO[σ]-Formeln in $\mathcal{A}$ aussagt:

☺ **(i)** $\forall x \big(\neg \dot{B}(x) \ \rightarrow \ (\dot{S}(x) \lor \dot{F}(x)) \big)$

(ii) $\neg \exists x \Big(\dot{F}(x) \ \land \ \big(\dot{F}(\dot{\mathit{Nachfolger}}(x)) \ \land \ \big(\dot{F}(\dot{\mathit{Nachfolger}}(\dot{\mathit{Nachfolger}}(x))) \land \neg \dot{\mathit{Nachfolger}}(x) \doteq \dot{\mathit{letzter}} \big) \big) \Big)$

(iii) $\Big(\neg \exists x \big(\dot{S}(x) \land \neg x \doteq \dot{\mathit{letzter}} \big) \ \rightarrow \ \neg \dot{S}(\dot{\mathit{letzter}}) \Big)$

Aufgabe 2: **(12 + 12 = 24 Punkte)**

Sei $\sigma = \{\dot{f}, \dot{R}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$, einem 3-stelligen Relationsymbol $\dot{R}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$. Betrachten Sie die σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, \dot{f}^{\mathcal{A}}, \dot{R}^{\mathcal{A}}, \dot{c}^{\mathcal{A}})$, wobei $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\dot{R}^{\mathcal{A}} = \{(0, 3, 4),\ (1, 3, 0),\ (4, 2, 3)\}$, $\dot{c}^{\mathcal{A}} = 3$ und die Funktion $\dot{f}^{\mathcal{A}}\colon A \times A \to A$ definiert ist durch

$\dot{f}^{\mathcal{A}}$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Zum Beispiel gilt $\dot{f}^{\mathcal{A}}(2,3) = 0$ und $\dot{f}^{\mathcal{A}}(1,3) = 4$.

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ die Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \text{Var} \to A$, für die gilt: $\beta(v_0) = 2$, $\beta(v_1) = 0$, $\beta(v_2) = 1$, $\beta(v_3) = 4$, und $\beta(v_i) = 3$ für alle $i \geq 4$.

☺ **(a)** Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$ und $[\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}$ für

- $t_1 \;:=\; \dot{f}(\dot{f}(v_1, v_5), \dot{c})$
- $t_2 \;:=\; \dot{f}\big(\dot{f}(\dot{c}, \dot{f}(v_2, \dot{c})), v_1\big)$

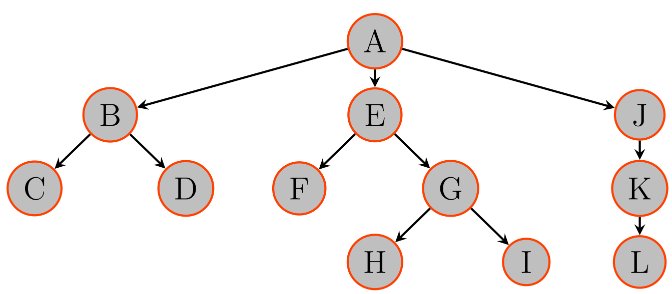
(b) Berechnen Sie $[\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{I}}$ und $[\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{I}}$ für

- $\varphi_1 \;:=\; \big(\; \dot{R}(v_1, v_2, \dot{f}(v_0, v_2)) \vee \exists v_0 \dot{R}(v_0, v_2, v_3) \;\big)$
- $\varphi_2 \;:=\; \forall v_1 \Big(\; \dot{f}(v_1, \dot{c}) \doteq \dot{f}(v_2, \dot{c}) \;\to\; \exists v_3 \big(\dot{R}(v_1, v_2, v_3) \vee \dot{f}(v_1, v_5) \doteq v_4\big) \;\Big)$

Aufgabe 3: (12 + 12 = 24 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen gerichtete Bäume durch Strukturen über einer Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{Elternknoten}$ repräsentiert werden.

☺ **(a)** Beschreiben Sie, wie ein gegebener gerichteter Baum $B = (V, E)$ durch eine Struktur über der Signatur $\{\dot{Elternknoten}\}$ modelliert werden kann. Geben Sie die entsprechende Struktur für den folgenden Baum an:



(b) Geben Sie je eine Formel $\varphi(x)$ der Logik erster Stufe an, die ausdrückt, dass der Knoten x

☺ **(i)** ein Blatt ist,

☺ **(ii)** die Wurzel ist,

(iii) genau zwei Kinder hat.

Aufgabe 4: (3 × 8 = 24 Punkte)

Sei $\sigma := \{\dot{E}, \dot{P}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$ und einem 1-stelligen Relationssymbol $\dot{P}$. Geben Sie für jede der folgenden Formeln je eine σ-Struktur an, die die Formel erfüllt, und eine, die die Formel nicht erfüllt:

☺ **(a)** $\forall x \forall y \forall z \big(\; \big(\dot{E}(x,y) \wedge \dot{E}(y,z)\big) \;\to\; \dot{E}(x,z) \; \big)$

(b) $\forall x \forall y \Big(\; \dot{E}(x,y) \;\to\; \big(\; \big(\dot{P}(y) \wedge \neg \dot{P}(x)\big) \;\vee\; \big(\dot{P}(x) \wedge \neg \dot{P}(y)\big) \; \big) \; \Big)$

(c) $\Big(\;\; \forall x \forall y \big(\dot{E}(x,y) \vee \dot{E}(y,x)\big) \;\;\wedge\;\; \forall x \forall y \big(\, (\dot{E}(x,y) \wedge \dot{E}(y,x)) \to x \doteq y \, \big) \;\; \Big)$