Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

12. Dezember 2007

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 8

Abgabe: *bis spätestens 19. Dezember 2007, 8.¹⁵ Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum 113)*

Aufgabe 1: Färbungsprobleme (9 + 7 + 9 = 25 Punkte)

Es soll ein Klausurplan für 7 Klausuren A–G aufgestellt werden, bei dem kein Student mehr als eine Klausur pro Tag schreiben muss. Über die Teilnehmer an den Klausuren ist Folgendes bekannt:

- Für jede der Klausuren B,C,E und G gibt es mindestens einen Studenten, der sich für diese Klausur und A angemeldet hat.
- Es gibt Studenten, die sich für B und C angemeldet haben, als auch Studenten, die die Kombination B und E gewählt haben.
- Jeder Student, der D mitschreibt, hat sich auch für C und G angemeldet.
- Mindestens ein Teilnehmer der Klausur G nimmt an F teil.

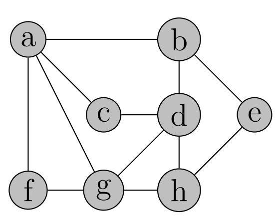
☺ **(a)** Stellen Sie den Konfliktgraphen auf.

☺ **(b)** Geben Sie einen Klausurplan an, bei dem kein Student an mehr als einer Klausur pro Tag teilnimmt.

☺ **(c)** Wie viele Tage werden für einen solchen Klausurplan benötigt?

Aufgabe 2: Bäume (12 + 13 = 25 Punkte)

☺ **(a)** Geben Sie in dem folgenden Graph einen Spannbaum an, den man so wurzeln kann, dass er die Höhe 2 hat. Kennzeichnen Sie die Wurzel und die Blätter in Ihrer Lösung.



(b) Beweisen Sie, dass jeder ungerichtete, zusammenhängende Graph $G = (V, E)$, dessen Knotenmenge V endlich ist, einen Spannbaum besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie Induktion nach $n := |E|$.

Aufgabe 3: Entscheidungsbäume **($12 + 13 = 25$ Punkte)**

Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel. Das Spiel ist in Runden aufgeteilt, wobei Spieler A in den geraden Runden und Spieler B in den ungeraden Runden spielt. In der ersten Runde wählt Spieler B eine Zahl aus $\{1, 2\}$. In jeder der nachfolgenden Runden wählt der jeweilige Spieler eine Zahl aus $\{1, 2, 3\}$ mit der Einschränkung, dass die Zahl aus der vorhergehenden Runde nicht gewählt werden darf. Nach jeder Runde wird die Summe der bereits gewählten Zahlen berechnet. Nimmt diese Summe den Wert 6 an, so gewinnt der Spieler der jeweiligen Runde; übersteigt sie den Wert 6, so verliert er.

☺ **(a)** Beschreiben Sie das Spiel durch einen Entscheidungsbaum.

☺ **(b)** Wer gewinnt, wenn beide Spieler optimal spielen, d.h. wenn jeder Spieler immer nur diejenigen Zahlen wählt, mit denen er – falls dies noch möglich ist – gewinnen kann?

Aufgabe 4: Eigenschaften von Relationen, Ordnungen **($15 + 10 = 25$ Punkte)**

Sei $\mathcal{G}$ die Menge der ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V \subseteq \mathbb{N}$.

(a) Unter (i) bis (iii) sind zweistellige Relationen über $\mathcal{G}$ gegeben. Überprüfen Sie für jede dieser Relationen, ob sie reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, konnex bzw. transitiv ist.

- **(i)** $\{\, (G, G') \in \mathcal{G}^2 \,:\, G \cong G' \,\}$
- **(ii)** $\{\, (G, G') \in \mathcal{G}^2 \,:\, G \text{ hat höchstens so viele Knoten wie } G' \,\}$
- **(iii)** $\{\, (G, G') \in \mathcal{G}^2 \,:\, G' \text{ besitzt einen Teilgraph } G'' \text{ mit } G'' \cong G \,\}$

(b) Zeigen Sie, dass die zweistellige Relation

$$R \;:=\; \{\, (G, G') \in \mathcal{G}^2 \,:\, G \text{ ist ein induzierter Teilgraph von } G' \,\}$$

eine partielle Ordnung, aber keine lineare Ordnung, auf $\mathcal{G}$ ist.