Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

5. Dezember 2007

Diskrete Modellierung

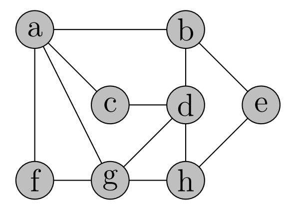
Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 7

Abgabe bis spätestens: *12. Dezember 2007, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in R. 113)*

Aufgabe 1: **(6 + 6 = 12 Punkte)**

Betrachten Sie den ungerichteten Graphen G auf der rechten Seite.



☺ **(a)** Geben Sie einen Euler-Weg in G an. Besitzt G auch einen Euler-Kreis?

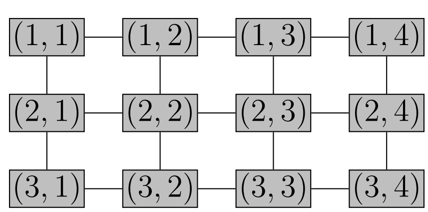
(b) Geben Sie einen Spannbaum von G an, den man so wurzeln kann, dass er die Höhe 2 hat. Kennzeichnen Sie die Wurzel in Ihrer Lösung.

Aufgabe 2: **($4 \times 7 = 28$ Punkte)**

Für $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei das $m \times n$-*Gitter* der Graph $G_{m\times n} = (V_{m\times n}, E_{m\times n})$ mit

$$\begin{aligned} V_{m\times n} &:= \big\{ (i,j) \,:\, 1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n \big\}, \\ E_{m\times n} &:= \big\{ \{(i,j),(i,j+1)\} \,:\, 1 \le i \le m,\, 1 \le j < n \big\} \cup \\ & \big\{ \{(i,j),(i+1,j)\} \,:\, 1 \le i < m,\, 1 \le j \le n \big\}. \end{aligned}$$

Das 3×4-Gitter $G_{3\times 4}$ sieht z.B. wie folgt aus:



(a) Überprüfen Sie, ob $G_{3\times 4}$ bipartit ist. Falls $G_{3\times 4}$ bipartit ist, so geben Sie zwei disjunkte Knotenmengen $V_1, V_2 \subseteq V_{3\times 4}$ mit $V_1 \cup V_2 = V_{3\times 4}$ an, so dass jede Kante aus $E_{3\times 4}$ einen Knoten aus V_1 und einen Knoten aus V_2 miteinander verbindet. Falls $G_{3\times 4}$ nicht bipartit ist, so begründen Sie dies.

(b) Geben Sie ein Matching maximaler Größe in $G_{3\times 4}$ an.

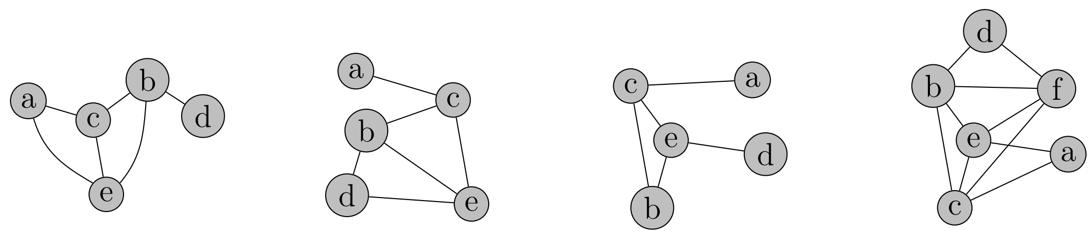
(c) Geben Sie einen Hamilton-Kreis in $G_{3\times 4}$ an.

(d) Für welche $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ besitzt $G_{m \times n}$ einen Hamilton-Kreis, für welche nicht?

Hinweis: Verallgemeinern Sie die Argumentation auf Seite 136 (oben) im Buch „Modellierung – Grundlagen und formale Methoden“ von Uwe Kastens und Hans Kleine Büning. Das Buch befindet sich unter Anderem im Semesterapparat zur Vorlesung in der Informatik-Bibliothek.

Aufgabe 3: (12 + 12 + 11 = 35 Punkte)

Es seien die folgenden ungerichteten Graphen G_1, G_2, G_3 und G_4 gegeben:



G_1 G_2 G_3 G_4

☺ **(a)** Überprüfen Sie für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit $i \neq j$, ob Folgendes gilt:

- $G_i = G_j$
- G_i ist ein Teilgraph von G_j
- G_i ist ein induzierter Teilgraph von G_j

☺ **(b)** Überprüfen Sie, welche der Graphen isomorph zueinander sind. Falls zwei Graphen G_i und G_j isomorph sind, so geben Sie einen Isomorphismus von G_i nach G_j an. Falls hingegen G_i und G_j nicht isomorph sind, so begründen Sie dies.

☺ **(c)** Welche der Graphen kann man nachzeichnen, ohne den Stift abzusetzen oder eine Kante doppelt zu ziehen?

Aufgabe 4: (12 + 13 = 25 Punkte)

König Artus will für die Tafelrunde eine Sitzordnung für sich und neun seiner Ritter festlegen, bei der er und die neun Ritter im Kreis an einem runden Tisch sitzen. Das wäre nicht schwer, gäbe es nicht diese Rivalitäten und Eifersüchteleien zwischen den Rittern. König Artus möchte, dass Lancelot zu seiner Rechten und Kay zu seiner Linken sitzt. Erec weigert sich, neben jemand anderem als Lyonel oder Tristan zu sitzen. Galahad will weder neben Tristan noch neben Lancelot oder Lyonel sitzen. Parzival lehnt es ab, neben Gawain, Lancelot oder Lyonel zu sitzen. Gaheris möchte auf keinen Fall neben Gawain, Lancelot oder Kay sitzen. Tristan weigert sich, neben Lancelot, Parzival oder Kay zu sitzen. Gawain würde sich neben jeden anderen setzen, aber nicht neben Galahad oder Kay. Und Lyonel ist dagegen, neben Gawain zu sitzen.

☺ **(a)** Stellen Sie den Konfliktgraphen auf.

(b) Verwenden Sie den Konfliktgraphen aus (a), um eine Tischordnung aufzustellen, die von allen akzeptiert wird. Zeichnen Sie den entsprechenden Graph und die Sitzordnung.