Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

28. November 2007

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 6

Abgabe bis spätestens: *5. Dezember 2007, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in R. 113)*

Aufgabe 1: **(10 + 5 + 10 = 25 Punkte)**

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch $\varphi_n := \bigwedge_{i=1}^{n} (X_i \leftrightarrow Y_i)$.

☺ **(a)** Beschreiben Sie die erfüllenden Belegungen $\mathcal{B}\colon \mathrm{Var}(\varphi_n) \to \{0,1\}$ für φ_n. Wie viele solche Belegungen gibt es?

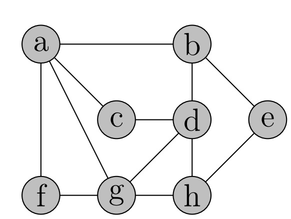
(b) Geben Sie eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF an.

(c) Beweisen Sie Satz 3.38, d.h. zeigen Sie, dass jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n konjunktive Klauseln hat.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dazu an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^n konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \cdots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Ihrer Antwort aus Teil (a), dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$ von mindestens zwei verschiedenen die Formel φ_n erfüllenden Belegungen wahr gemacht wird. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

Aufgabe 2: **(6 × 5 = 30 Punkte)**

Betrachten Sie den ungerichteten Graphen G auf der rechten Seite.



☺ **(a)** Geben Sie die Knotenmenge V und die Kantenmenge E des Graphen G an. Repräsentieren Sie G außerdem durch eine Adjazenzmatrix und eine Adjazenzliste.

☺ **(b)** Geben Sie einen Euler-Weg in G an. Besitzt G auch einen Euler-Kreis?

☺ **(c)** Geben Sie einen Hamilton-Kreis in G an.

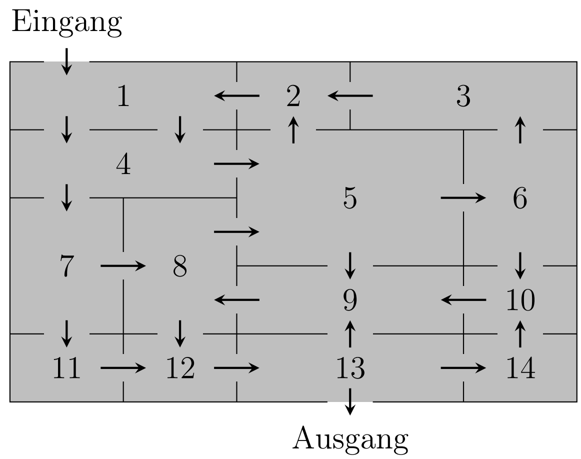
(d) Zeigen Sie, dass G orientierbar ist.

(e) Geben Sie einen Spannbaum von G an, den man so wurzeln kann, dass er die Höhe 2 hat. Kennzeichnen Sie die Wurzel in Ihrer Lösung.

(f) Geben Sie den Kanten von G Richtungen, so dass der entstehende gerichtete Graph genau zwei starke Zusammenhangskomponenten besitzt. Geben Sie die Knotenmengen der beiden starken Zusammenhangskomponenten an.

Aufgabe 3: **$(9 + 8 + 8 = 25$ Punkte)**

Die folgende Abbildung stellt einen Grundriss eines Irrgartens dar.



Die Türen in diesem Irrgarten schwingen nur zu einer Seite auf und haben keine Klinken o.ä. Nachdem also ein Besucher die Eingangstür oder eine nachfolgende Tür durchschritten hat und die Tür hinter ihm zugefallen ist, kann der Besucher nicht mehr durch diese Tür zurück. Die Tür bleibt aber für weitere Durchgänge in der ursprünglichen Richtung benutzbar. Die allgemeinen Sicherheitsbestimmungen für Irrgärten schreiben vor, dass jeder Besucher, der den Irrgarten betritt, – egal wie er läuft – den Ausgang erreichen kann.

☺ **(a)** Modellieren Sie den Irrgarten durch einen Graphen.

(b) Formulieren Sie die allgemeinen Sicherheitsbestimmungen für Irrgärten mit Begriffen der Graphentheorie.

(c) Überprüfen Sie anhand der Formulierungen aus (b), ob der angegebene Irrgarten den allgemeinen Sicherheitsbestimmungen entspricht.

Aufgabe 4: **$(10 + 10 = 20$ Punkte)**

Sie bekommen die Aufgabe, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ Rechner zu vernetzen. Ihr Auftraggeber verlangt folgende Eigenschaften des Netzwerkes:

(1) Von jedem Rechner muss jeder andere Rechner über einen Leitungsweg erreichbar sein.

(2) Auch wenn genau eine Leitung zwischen zwei Rechnern ausfällt, muss jeder Rechner über einen Leitungsweg mit jedem anderen Rechner verbunden sein.

(3) An jedem Rechner können maximal vier Leitungen angeschlossen werden.

Dabei können auf einer Leitung Daten in beide Richtungen gesendet werden.

Ein solches Netzwerk lässt sich leicht als ungerichteter Graph darstellen: ein Knoten repräsentiert einen Rechner, und eine Kante repräsentiert eine Leitung.

☺ **(a)** Formulieren Sie die Eigenschaften (1), (2) und (3) mit Begriffen der Graphentheorie.

☺ **(b)** Untersuchen Sie die folgenden Graphen G_1, G_2 und G_3 auf Ihre Tauglichkeit bezüglich der Eigenschaften (1), (2) bzw. (3):

- $G_1 = (V_1, E_1)$ mit $V_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $E_1 = \{\{1, i\} : 2 \leq i \leq n\}$
- $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $V_2 = V_1$ und $E_2 = \{\{i, i+1\} : 1 \leq i < n\}$
- $G_3 = (V_3, E_3)$ mit $V_3 = V_1$ und $E_3 = E_2 \cup \{\{n, 1\}\}$