Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

14. November 2007

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 4

Abgabe bis spätestens: *Mittwoch, 21. November 2007, 8:15 Uhr (entweder vor der Vorlesung oder im Raum 113)*

Zur Erinnerung: *Eine Aufgabe gilt nur dann als bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.*

Hinweis: *Einfache Aufgaben sind mit einem ☺ markiert.*

Aufgabe 1: (8+5+6+6=25 Punkte)

☺ **(a)** Welche der folgenden Wörter gehören gemäß Definition 3.3 zur Sprache AL, welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.)

- $(V_1 \wedge \mathbf{1})$
- $(V_1 \wedge \mathbf{101})$
- $(\neg(V_1 \wedge V_2) \vee V_3)$
- $\neg(V_1 \wedge V_2) \vee V_3$
- $(V_1 \rightarrow V_2)$
- $(V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3)$
- $(V_1 \leftarrow V_2)$
- $(V_1 \leftrightarrow V_2)$

(b) Beweisen Sie, dass für die Formel $\varphi := \big((V_1 \leftrightarrow \mathbf{1}) \wedge (V_1 \rightarrow (V_2 \wedge \mathbf{0}))\big)$ gilt: $\varphi \in \mathsf{AL}$.

☺ **(c)** Betrachten Sie die Formel φ aus (b) und die Belegung $\mathcal{B}\colon \mathrm{Var}(\varphi) \rightarrow \{0,1\}$ mit $\mathcal{B}(V_1) = 1$ und $\mathcal{B}(V_2) = 0$. Berechnen Sie den Wert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}}$.

☺ **(d)** Geben Sie den Syntaxbaum der Formel φ aus (b) an.

Aufgabe 2: (10+5+10=25 Punkte)

Schon kurz nach der Geburt von Herakles und Eurystheus entstand ein Streit, wer von den beiden der rechtmäßige Herrscher sei. Dazu wurden die drei bekanntesten Orakel Griechenlands befragt.

Das Ammonion gab bekannt, dass die Orakelsprüche aus Klaros grundsätzlich falsch seien. Ebenso ließ das Orakel aus Klaros verlauten, dass die Orakelsprüche aus Delphi samt und sonders unzutreffend seien. Das Orakel aus Delphi jedoch behauptete, sowohl die Sprüche des Ammonions als auch die des Orakels in Klaros seien unwahr.

Wem sollen die armen Griechen nun glauben?

☺ **(a)** Zerlegen Sie den obigen Text in atomare Aussagen und geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die das im Text zusammengefasste Wissen repräsentiert (ähnlich wie in den Beispielen 3.1, 3.12 und 3.13 im Skript).

☺ **(b)** Geben Sie für Ihre Formel φ aus (a) eine Belegung $\mathcal{B}$ an, die besagt, dass das Ammonion die Wahrheit sagt und die beiden anderen Orakel lügen. Erfüllt $\mathcal{B}$ die Formel φ? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(c) Welchen Orakeln können die Griechen glauben, welchen nicht? Falls es mehrere Möglichkeiten gibt, geben Sie alle an.

Aufgabe 3: (7+9+9=25 Punkte)

Auf der Insel Wafa leben zwei Stämme: Die Was, die immer die Wahrheit sagen, und die Fas, die immer lügen. Ein Reisender besucht die Insel und kommt mit drei Einwohnern A, B, C ins Gespräch. Der Reisende schreibt daraufhin folgende atomare Aussagen in sein Notizbuch:

- X_A: A sagt die Wahrheit
- X_B: B sagt die Wahrheit
- X_C: C sagt die Wahrheit

☺ **(a)** Sei $\mathcal{B}\colon \{X_A, X_B, X_C\} \to \{0,1\}$ die Belegung mit $\mathcal{B}(X_A) = 1$, $\mathcal{B}(X_B) = 0$ und $\mathcal{B}(X_C) = 0$. Beschreiben Sie umgangssprachlich, welcher Sachverhalt durch die Belegung $\mathcal{B}$ ausgedrückt wird. Was folgt daraus über die Stammesangehörigkeit der drei Einwohner A, B und C?

Die Informationen, die der Reisende im Gespräch erhalten hat, fasst er durch folgende aussagenlogische Formeln zusammen:

- $\varphi_A := \big(X_A \leftrightarrow (\neg X_B \vee \neg X_C)\big)$
- $\varphi_B := \big(X_B \leftrightarrow (X_A \to X_C)\big)$
- $\varphi_C := \big(X_C \leftrightarrow (\neg X_B \to X_A)\big)$

Er merkt an, dass die durch $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ formalisierten Aussagen der Wahrheit entsprechen.

☺ **(b)** Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der Formeln $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ aussagt.

(c) Zu welchen Stämmen gehören A, B und C?

Aufgabe 4: (13+12=25 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln eine Wahrheitstafel und alle erfüllenden Belegungen $\mathcal{B}\colon \mathrm{Var}(\varphi_1) \to \{0,1\}$ (für (a)) bzw. $\mathcal{B}\colon \mathrm{Var}(\varphi_2) \to \{0,1\}$ (für (b)) an.

☺ **(a)** $\varphi_1 := \Big(\big((V_1 \leftrightarrow \neg V_2) \wedge (\neg V_2 \vee V_3)\big) \wedge (V_3 \to V_1)\Big)$

☺ **(b)** $\varphi_2 := \Big((V_1 \leftrightarrow \mathbf{1}) \wedge \big(V_1 \to (V_2 \wedge \mathbf{0})\big)\Big)$