Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

7. November 2007

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 14. November 2007 (bis spätestens 8:15 Uhr vor dem Magnus-Hörsaal)

Aufgabe 1: (15 Punkte)

Beweisen Sie: Falls M eine endliche Teilmenge einer unendlichen Menge U ist, so ist das Komplement von M in U unendlich.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

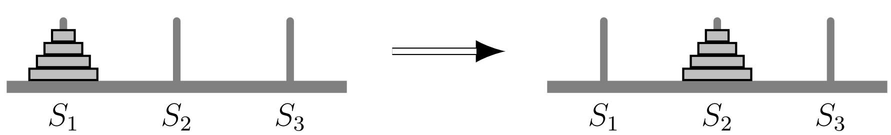
Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

(a) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

(b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Aufgabe 3: Türme von Hanoi (30 Punkte)

Ein Turm von $n \in \mathbb{N}_{>0}$ unterschiedlich großen gelochten Scheiben soll von einem Stab (S_1) auf einen zweiten Stab (S_2) unter Zuhilfenahme eines Hilfsstabes (S_3) verschoben werden (das folgende Bild zeigt die Situation für den Fall $n = 4$).



Dabei müssen die folgenden Regeln beachtet werden:

- Pro Zug darf nur eine Scheibe bewegt werden. Es kann also immer nur die oberste Scheibe eines Turmes bewegt werden.
- Es darf nie eine größere Scheibe auf einer kleineren Scheibe liegen.

(a) Beschreiben Sie, wie der Turm im Fall $n = 4$ von S_1 nach S_2 verschoben werden kann.

(b) Beweisen Sie, dass es für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ möglich ist, die n Scheiben von S_1 nach S_2 zu verschieben.

Hinweis: Beweisen Sie zuerst durch vollständige Induktion nach n, dass die folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

A(n): Seien $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$, sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$, und seien m Scheiben so auf die drei Stäbe verteilt, dass gilt:

- Auf S_i liegen mindestens n Scheiben.
- Die Scheiben auf den beiden anderen Stäben sind größer als die obersten n Scheiben auf S_i.

Dann lassen sich die obersten n Scheiben von S_i so nach S_j verschieben, dass keine der anderen Scheiben bewegt wird.

Aufgabe 4: (30 Punkte)

Sei die Sprache L über dem Alphabet $A := \{(,)\}$ wie folgt rekursiv definiert:

Basisregel:	(B)	$\varepsilon \in L$
Rekursive Regeln:	(R1)	Ist $w \in L$, so ist auch $(w) \in L$.
	(R2)	Sind $w_1, w_2 \in L$, so ist auch $w_1 w_2 \in L$.

(a) Welche der folgenden Wörter gehören zu L und welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.)

- ()
- ()()
- ((
- (())
- ())(
- ((())()

(b) Beweisen Sie, dass $(()(()()))\in L$ ist.

(c) Für jedes Symbol $s \in A$ und jedes Wort $w \in A^*$ bezeichne $|w|_s$ die Anzahl der Vorkommen des Symbols s in w. Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle Wörter $w \in L$ gilt: $|w|_(= |w|_)$.

(d) Beweisen Sie, dass $()((()()\notin L$ ist.